Traslazioni e parabole

Bruna Cavallaro e Daniela Valenti, 2024

Traslazioni e grafici

Su un piano Oxy che trasla posso disegnare il grafico di rette, parabole, circonferenze, …
Conosco l'equazione di un grafico sul piano Oxy.
Come cambia l'equazione dopo la traslazione?

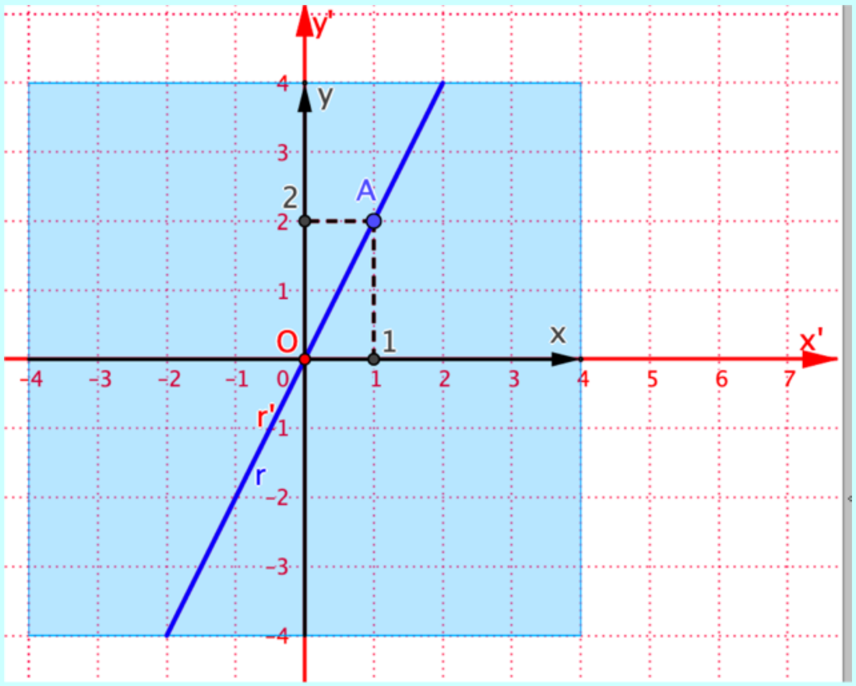
Per cercare la risposta, comincio da un caso semplice: sul piano è disegnata una retta.

Bruna Cavallaro e Daniela Valenti, 2024

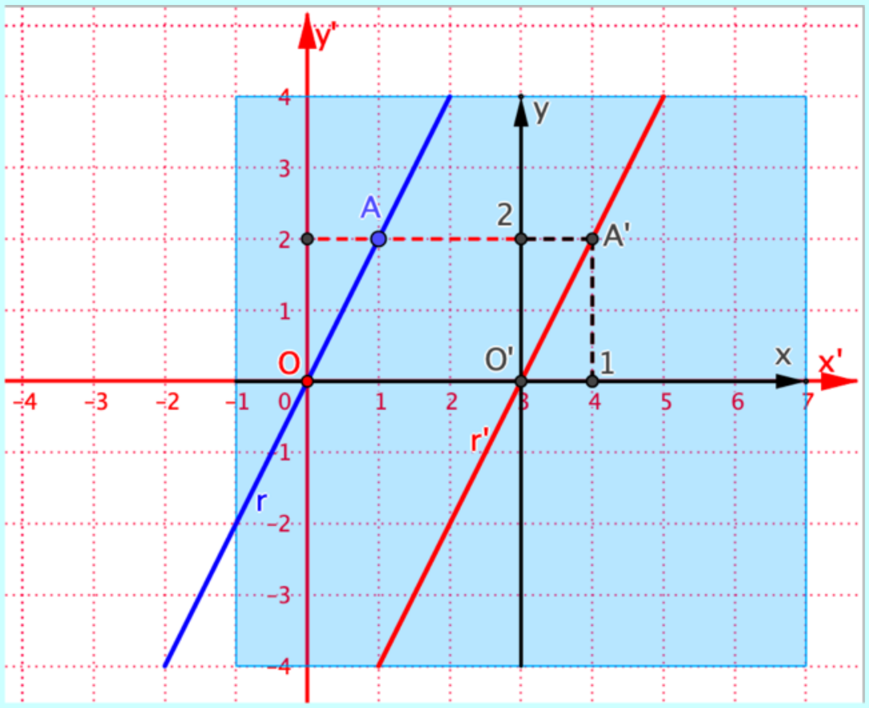
Trasformare una retta

Un primo esempio

Sul piano Oxy
disegno una retta *r*



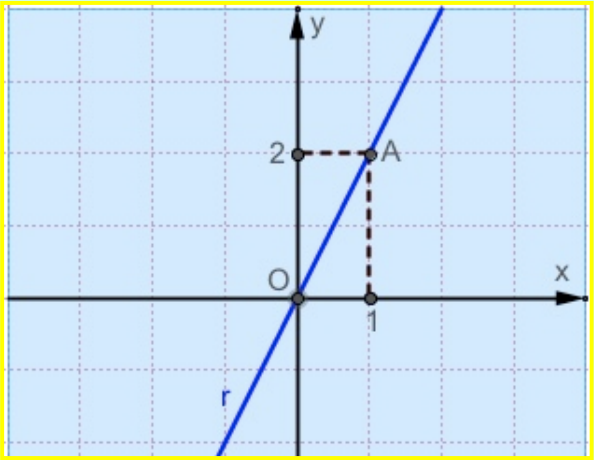
Traslo il piano e osservo
che cosa succede.



La retta ha mantenuto la stessa pendenza.
Cambia l'equazione della retta rispetto al piano fisso Ox'y'?

Bruna Cavallaro e Daniela Valenti, 2024

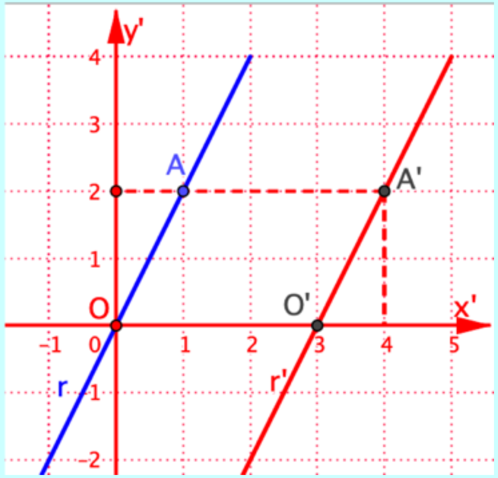
Equazione della retta dopo la traslazione



La traslazione ha equazioni

$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y \end{cases}$$

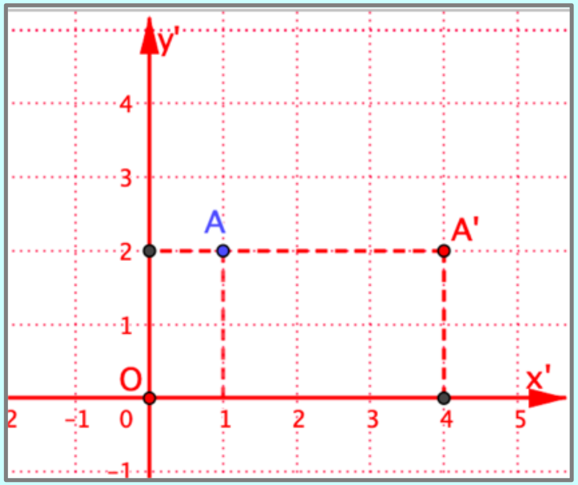
Aggiungo 3 alle ascisse di tutti i punti



Retta	Equazione
r che passa per O (0; 0) e A(1; 2)	$\frac{y}{x} = \frac{2}{1} \Rightarrow y = 2x$
r' che passa per O'(3; 0) e A'(4;2)	$\frac{y'}{x'-3} = \frac{2}{4-3} \Rightarrow y' = 2(x'-3)$

Bruna Cavallaro e Daniela Valenti, 2024

Traslare punti



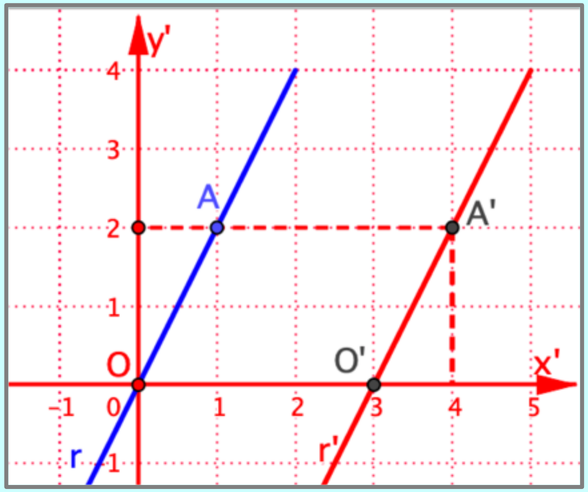
A(1; 2) diventa A'(4; 2)

$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y \end{cases}$$

Calcola x' ed y' a partire da x e y

TRASLAZIONE

Traslare rette



r: $y = 2x$ **diventa** r': $y' = 2(x' - 3)$

$$\begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' \end{cases}$$

Esprime x e y per mezzo di x' e y'

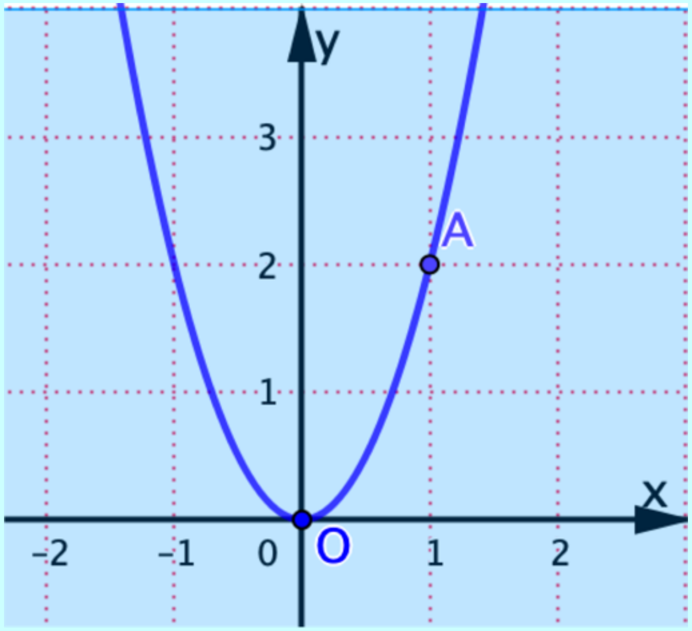
TRASLAZIONE INVERSA

Applicare le equazioni di una trasformazione

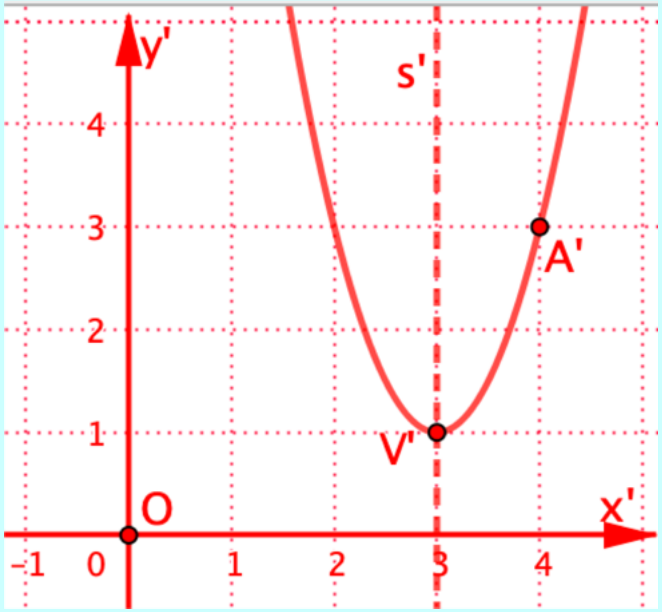
Esempio	**In generale**
Traslazione che aggiunge 3 alle ascisse $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y \end{cases} \quad (*)$	**Traslazione** $\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases} \quad (°)$
I. Si applica la traslazione (*) per trasformare punti A (1; 2) diventa A' $\begin{cases} x' = 1 + 3 \\ y' = 2 \end{cases}$	I. Si applica la traslazione (°) per trasformare punti A (1; 2) diventa A' $\begin{cases} x' = 1 + p \\ y' = 2 + q \end{cases}$
II. Per traslare grafici si applica la trasformazione inversa $\begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' \end{cases}$	II. Per traslare grafici si applica la trasformazione inversa $\begin{cases} x = x' - p \\ y = y' - q \end{cases}$
$y = 2x$ diventa $y' = 2(x' - 3)$	$y = 2x$ diventa $y' - q = 2(x' - p)$

Trasformare una parabola

Un secondo esempio



Traslo il piano



Parabola con:
- vertice V = O(0; 0);
- asse di simmetria x = 0;
- equazione $y = 2x^2$

Parabola con:
- vertice V'(3; 1);
- asse di simmetria x' = 3

E l'equazione della parabola traslata?

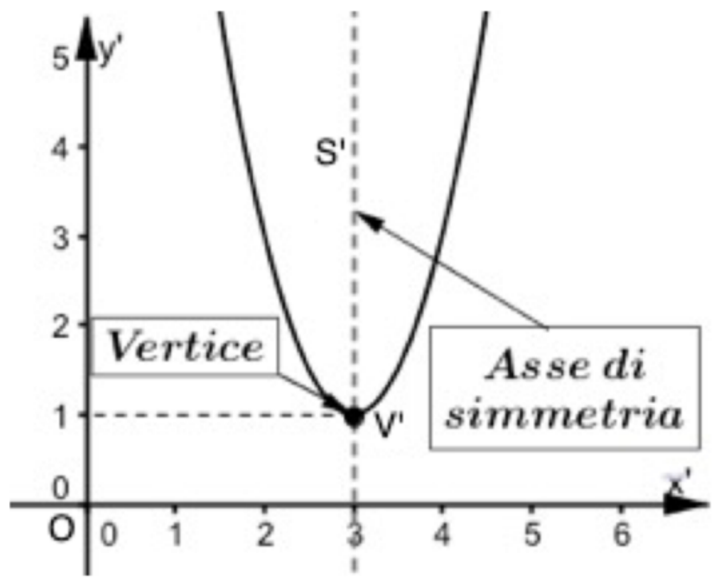
Bruna Cavallaro e Daniela Valenti, 2024

Equazione della parabola traslata

Un secondo esempio

Traslazione $\begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y+1 \end{cases}$ **Inversa** $\begin{cases} x = x'-3 \\ y = y'-1 \end{cases}$

Grafico



Vertice $V'(3, 1)$

Asse di simmetria s' **d'equazione** $x' = 3$

Equazione: $y'-1=2\left(x'-3\right)^2$

Scrivo l'equazione in altra forma

- **esplicito y':** $y'=2\left(x'-3\right)^2+1$
- **sviluppo il quadrato:**

$$y'=2\left[\left(x'\right)^2-6x'+9\right]+1$$

- **semplifico e ottengo:**

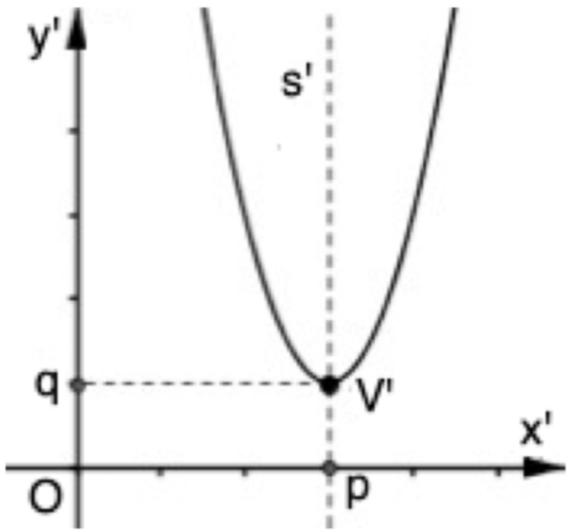
$$y'=2\left(x'\right)^2-12x'+19$$

Equazione della parabola traslata

In generale

Traslazione $\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}$ **Inversa** $\begin{cases} x = x' - p \\ y = y' - q \end{cases}$

Grafico



Vertice $V'(p, q)$

Asse di simmetria s'd'equazione $x' = p$

Equazione: $y' - q = a\left(x' - p\right)^2$

Scrivo l'equazione in altra forma

- **esplicito y':** $y' = a\left(x' - p\right)^2 + q$
- **sviluppo il quadrato:**

$$y' = a\left(x'\right)^2 - 2apx' + ap^2 + q$$

- **semplifico e ottengo:**

$$y' = a\left(x'\right)^2 + bx' + c \quad \textbf{con} \begin{cases} b = -2ap \\ c = ap^2 + q \end{cases}$$

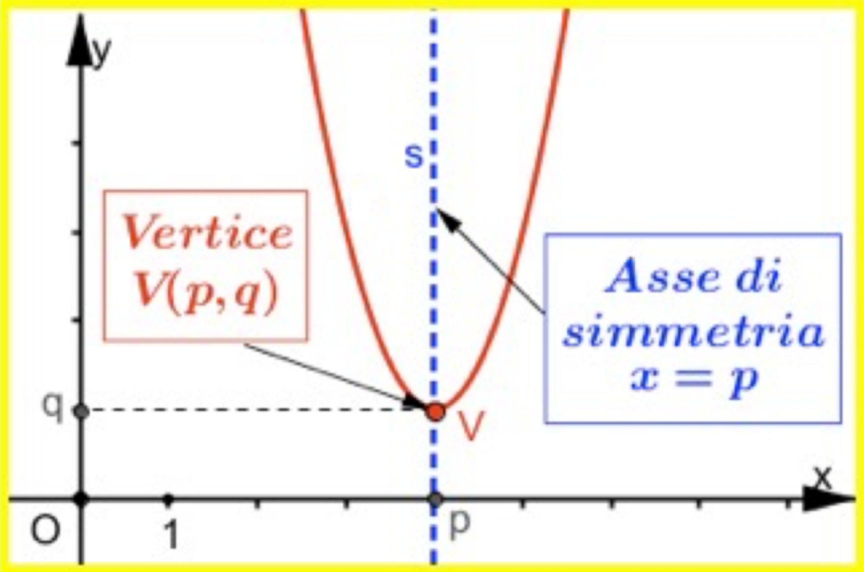
Riconoscere l'equazione di una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle y

Ora dimentico traslazione e lettere con apici e concludo che:

Una parabola con l'asse di simmetria parallelo all'asse y è descritta da una delle seguenti equazioni:

$$\boxed{y = a(x-p)^2 + q}$$

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c \quad \text{con} \begin{cases} b = -2ap \\ c = ap^2 + q \end{cases}}$$



Bruna Cavallaro e
Daniela Valenti, 2024

Attività

Completa la scheda per tracciare il grafico di una parabola a partire dalla sua equazione

Riflessioni sui risultati dell'attività

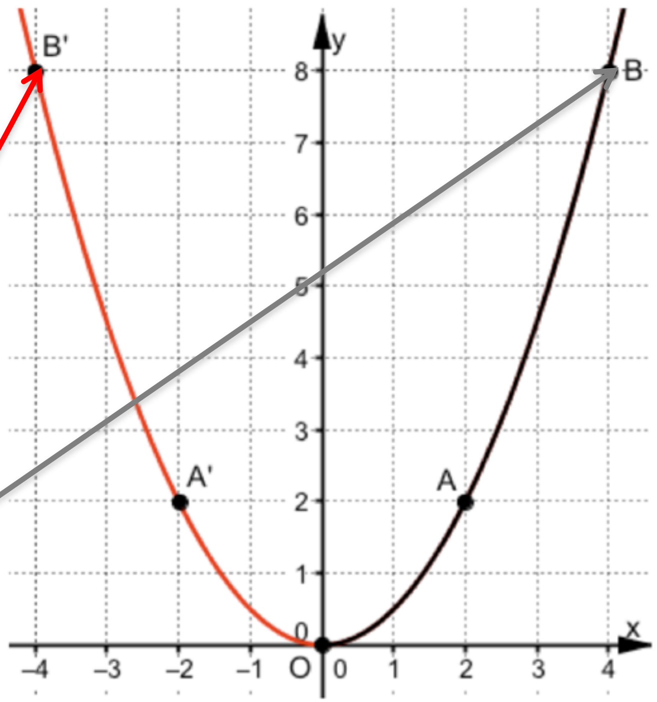
Da un'equazione $y = ax^2$ al grafico di una parabola

Equazione	$y = \frac{1}{2}x^2$
Equazione del tipo	$y = ax^2 \quad \text{con} \quad a = \frac{1}{2}$ *Vertice:* $O(0;\ 0)$ *Asse di simmetria* ***di equazione: x = 0***

Procedimento per tracciare il grafico

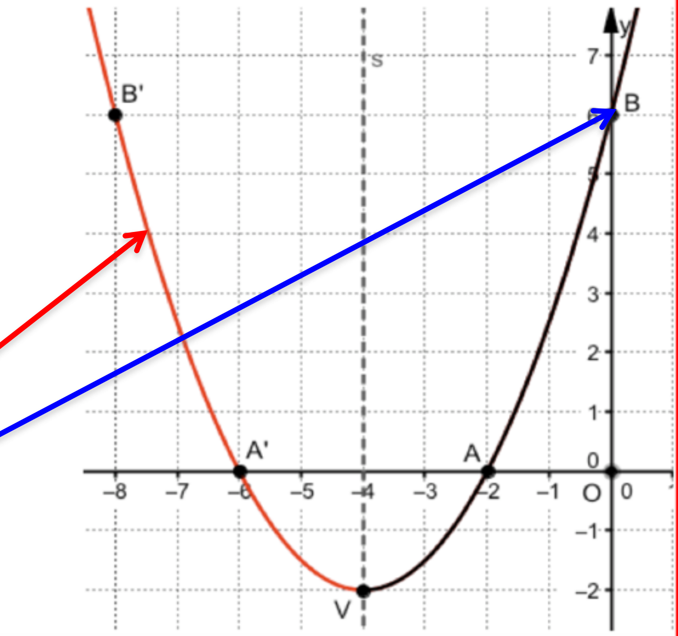
- ***Disegna vertice O e asse di simmetria.***
- ***Compila la tabella per trovare due punti A e B a destra dell'asse di simmetria.***
- ***Disegna un arco che raccorda O, A e B.***
- ***Disegna l'arco simmetrico rispetto all'asse di simmetria.***

x	2	4
$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{2}\cdot 2^2 = 2$	$\frac{1}{2}\cdot 4^2 = 8$



Bruna Cavallaro e Daniela Valenti, 2024

Da equazione $y = a(x - p)^2 + q$ al grafico di parabola

Equazione	$y=\frac{1}{2}(x+4)^2-2$
Equazione del tipo	$y=a(x-p)^2+q$ con $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ p=-4 \\ q=-2 \end{cases}$ *Vertice* ***V(–4, –2)*** *Asse di simmetria:* ***x = –4***
Per tracciare il grafico • ***Disegna vertice V e asse di simmetria.*** • ***Compila la tabella per trovare due punti A e B a destra dell'asse di simmetria.*** • ***Disegna un arco che raccorda V, A e B.*** • ***Disegna l'arco simmetrico rispetto all'asse di simmetria.***	

x	-2	0
y	0	6

Vertice V di una parabola d'equazione $y = ax^2 + bx + c$

ESEMPIO

Anche un'equazione del tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, *con* $\begin{cases} \boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{a}p \\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}p^2 + q \end{cases}$ (*)

descrive una parabola con vertice ***V(p, q)*** *e asse di simmetria parallelo all'asse y.*

Per tracciare il grafico il primo passo è: calcolare le coordinate del vertice ***V***.

2. È data l'equazione $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$, che è del tipo $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$,

con $\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{b} = 4$, $\boldsymbol{c} = 6$.

A. Completa il procedimento per calcolare le coordinate ***p*** e ***q*** del vertice ***V***.

Dalla prima delle due equazioni (*) esplicito ***p*** e ottengo: $\boldsymbol{p} = -\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}$

Sostituisco ad ***a*** e ***b*** i numeri assegnati e ottengo: $\boldsymbol{p} = -\frac{4}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -4$

V è un punto della parabola, perciò ***p*** e ***q*** sono legate da $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$

Ottengo $\boldsymbol{q} = \frac{1}{2}(-4)^2 + 4(-4) + 6 = \frac{1}{2} \cdot 16 - 16 + 6 = -2$

Trovo $V(-4, -2)$

Vertice V di una parabola d'equazione y = ax^2 + bx + c

IN GENERALE

Un'equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$ descrive una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y.

Il vertice V è il punto della parabola con l'ascissa p data da:

$$p = -\frac{b}{2a}$$

L'asse di simmetria s ha equazione:

$$x = p$$

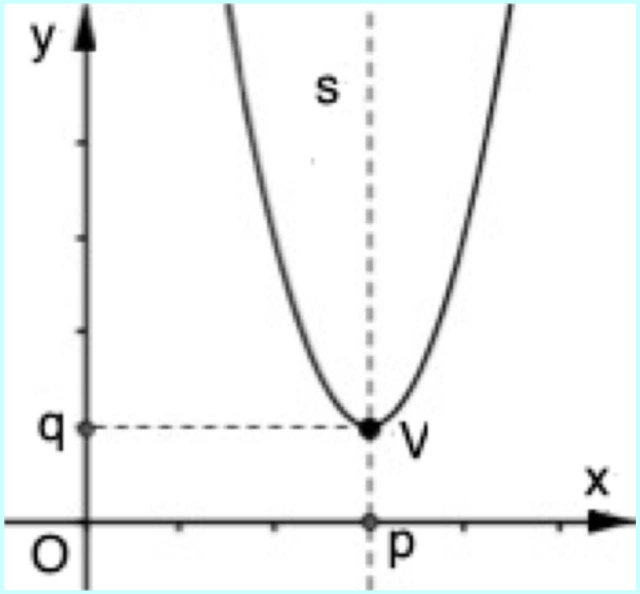


Grafico di una parabola d'equazione y = ax^2 + bx + c

ESEMPIO

B. Qual è il grafico della parabola?

Per la parabola d'equazione $y = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$ ho trovato:

$a = \frac{1}{2}\,, p = -4\,, q = -2$

Il grafico è quello che ho già tracciato.

Se non hai già tracciato il grafico, ora ritrovi il procedimento da seguire

Grafico di una parabola d'equazione y = ax^2 + bx + c

Equazione

$$y=\frac{1}{2}x^2+4x+6$$

Equazione del tipo

$$y = ax^2 + bx + c$$

*Calcolo le coordinate del vertice **V(p, q)***

$$\begin{cases} p=-\dfrac{b}{2a} \\ q=ap^2+bp+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-\dfrac{4}{1}=-4 \\ q=\frac{1}{2}(-4)^2+4(-4)+6=-2 \end{cases}$$

Per tracciare il grafico

- ***Disegna vertice V e asse di simmetria.***
- ***Compila la tabella per trovare due punti A e B a destra dell'asse di simmetria.***
- ***Disegna un arco che raccorda V, A e B.***
- ***Disegna l'arco simmetrico rispetto all'asse di simmetria.***

x	-2	0
y	0	6

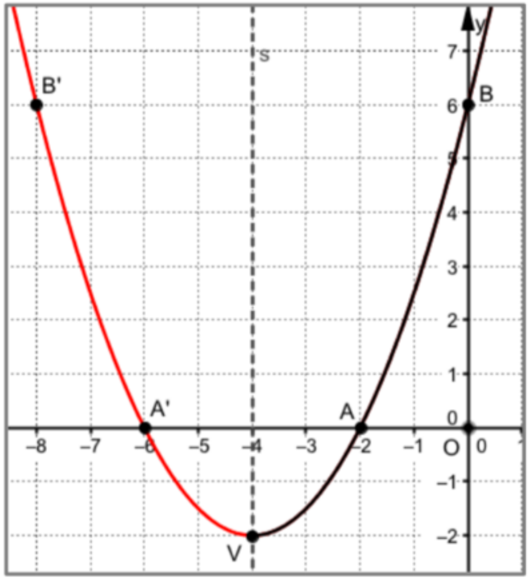
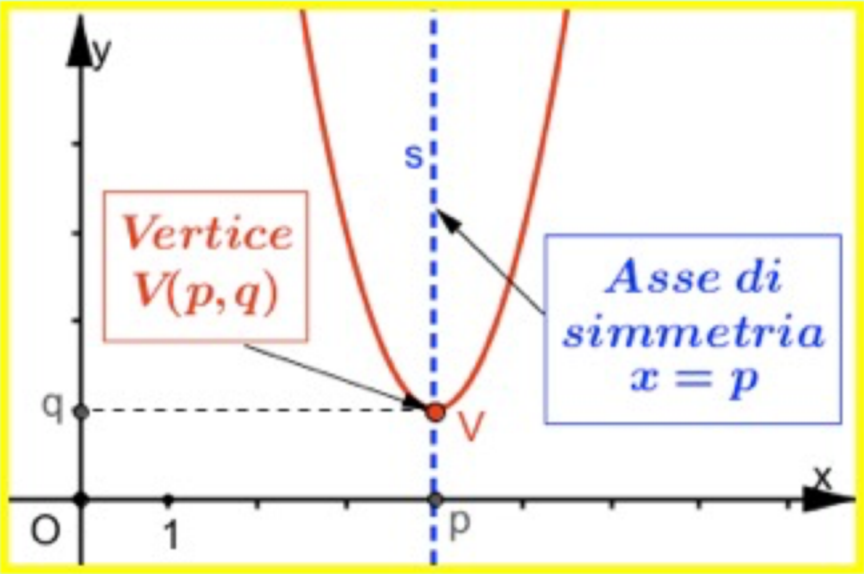


Grafico di un polinomio di 2^0 grado

Un polinomio di 2^0 grado, cioè del tipo $y = ax^2 + bx + c$, ha per grafico una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y e vertice $V(p, q)$.



$$V\begin{cases} p = -\dfrac{b}{2a} \\ q = ap^2 + bp + c \end{cases}$$

Procedimento per disegnare una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y

Procedimento valido solo se l'equazione è del tipo

$$\boxed{y = a(x - p)^2 + q}$$

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

Attenzione nel riconoscere l'equazione!

Riconoscere l'equazione di una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y

3. Quali fra le seguenti equazioni descrivono parabole con asse di simmetria parallelo ad asse y?

$y = -\frac{1}{2}(x+1)$	$y = -x^2 + 1$
NO x è presente al massimo al 1° grado	**SI** Equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$ con $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$

Riconoscere l'equazione di una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y

3. Quali fra le seguenti equazioni descrivono parabole con asse di simmetria parallelo ad asse y?

$y = 2x$	$y = -(x-1)^2$
NO x è presente al massimo al 1° grado	SI Equazione del tipo $y = a(x-p)^2 + q$ con $a = -1$, $p = 1$, $q = 0$

Riconoscere l’equazione di una parabola con asse di simmetria parallelo all’asse y

3. Quali fra le seguenti equazioni descrivono parabole con asse di simmetria parallelo ad asse y?

$y = 2x^2 + x$	$y = \frac{3}{x^2}$
SI Equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$ con $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$	**NO** Non confondere $\frac{3}{x^2}$ con $3x^2$