

### Coordinate cartesiane nello spazio. Problemi riassuntivi

1. È dato il piano  $\alpha$  d'equazione  $x + y + z - 2 = 0$ . Scrivere l'equazione della circonferenza del piano  $\alpha$  che ha centro  $C(1, 2, -1)$  e raggio 3.
2. Sono dati i punti  $A(1, 1, 0)$  e  $B(0, 1, -1)$ . Risolvere i seguenti quesiti.
  - a. Verificare che il luogo geometrico dei punti  $P$  tali che  $AP = 2 \cdot PB$  è una sfera  $S$ .
  - b. Determinare la lunghezza del raggio e le coordinate del centro  $C$  della sfera  $S$ .
  - c. Verificare che  $C$  è allineato con i punti  $A$  e  $B$ .
3. Dati i punti  $A(2, 0, -1)$  e  $B(-2, 2, 1)$ , provare che il luogo geometrico dei punti  $P$  dello spazio, tali che  $PA = \sqrt{2}PB$ , è costituito da una superficie sferica  $S$  e scrivere la sua equazione cartesiana. Verificare che il punto  $T(-10, 8, 7)$  appartiene a  $S$  e determinare l'equazione del piano tangente in  $T$  a  $S$ . [Quesito n° 4, Esame di Stato Liceo Scientifico 2019]
4. Sono dati, nello spazio tridimensionale, i punti  $A(3, 1, 0)$ ,  $B(3, -1, 2)$  e  $C(1, 1, 2)$ . Dopo aver verificato che  $ABC$  è un triangolo equilatero e che è contenuto nel piano  $\alpha$  d'equazione  $x + y + z - 4 = 0$ , stabilire quali sono i punti  $P$  tali che  $ABCP$  sia un tetraedro regolare. [Quesito n° 9, Esame di Stato Liceo Scientifico 2018]
5. Dati i punti  $A(-2, 3, 1)$ ,  $B(3, 0, -1)$ ,  $C(2, 2, -3)$ , determinare l'equazione della retta  $r$  passante per  $A$  e per  $B$  e l'equazione del piano  $\pi$  perpendicolare ad  $r$  e passante per  $C$ . [Quesito n° 5, Esame di Stato Liceo Scientifico 2017].
6. Determinare le coordinate dei centri delle sfere di raggio  $\sqrt{6}$  che sono tangenti al piano  $\pi$  di equazione  $x + 2y - z + 1 = 0$  nel suo punto  $P$  di coordinate  $(1, 0, 2)$ . [Quesito n° 7, Esame di Stato Liceo Scientifico 2017]
7. Date le rette: 
$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$
 e il punto  $P(1, 0, -2)$  determinare l'equazione del piano passante per  $P$  e parallelo alle due rette. [Quesito n° 9 Esame di Stato Liceo Scientifico 2016]
8. Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazione  $x + y - z = 0$ . [Quesito n° 5, Esame di Stato Liceo Scientifico 2015]
9. In un riferimento cartesiano nello spazio  $Oxyz$  sono dati i punti  $A(-3, 4, 0)$  e  $C(-2, 1, 2)$ . I tre punti  $O$ ,  $A$  e  $C$  giacciono su un piano  $E$ . Determinare l'equazione che descrive il piano  $E$ . [Quesito n° 4, Sessione suppletiva Esame di Stato Liceo Scientifico 2015]
10. Nello spazio sono dati due piani  $\alpha$  e  $\beta$  rispettivamente di equazione:  $\alpha) x - 3y + z - 5 = 0$  e  $\beta) x + 2y - z + 3 = 0$ . Dopo aver determinato l'equazione parametrica della retta  $r$  da essi individuata, verificare che essa appartiene al piano  $\gamma$  di equazione  $3x + y - z + 1 = 0$ . [Quesito n° 4, Sessione straordinaria Esame di Stato Liceo Scientifico, settembre 2015]
11. In un riferimento cartesiano nello spazio  $Oxyz$ , data la retta  $r$  di equazioni:
$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 1 + t \\ z = kt \end{cases}$$
 e il piano  $P$  di equazione:  $x + 2y - z + 2 = 0$ , determinare per quale valore di  $k$  la retta  $r$  e il piano  $P$  sono paralleli, e la distanza tra di essi. [Quesito n° 9, Sessione straordinaria Esame di Stato Liceo Scientifico, settembre 2015]
12. Trovare l'equazione del piano tangente alla superficie sferica avente come centro l'origine e raggio 2, nel suo punto di coordinate  $(1, 1, z)$ , con  $z$  negativa. [Quesito della simulazione MIUR per Esame di Stato Liceo Scientifico 22 aprile 2015]

13. Fissato nello spazio un sistema di riferimento ortogonale monometrico  $Oxyz$ , si considerino i punti  $A(1; 3; 0)$ ,  $B(-1; 0; 1)$ . Determinare il luogo geometrico dei punti equidistanti da  $A$  e da  $B$ , verificando che si tratta di un piano di equazione  $2x + 3y - z - 4 = 0$ .  
 Detti  $C$ ,  $D$  ed  $E$  i punti d'intersezione tra questo piano e gli assi  $x$ ,  $y$  e  $z$  rispettivamente, determinare il volume della piramide avente per base il triangolo  $OCD$  e per vertice il punto  $E$ .  
 [Quesito tratto dalla Rivista Archimede – 1/2015 - proposte per la prova scritta a conclusione del liceo scientifico]
14. Fissato nello spazio un sistema di riferimento ortogonale monometrico  $Oxyz$ , si considerino i punti  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(1; 1; 4)$  e  $C(-1; 1; 1)$ .  
 a. Mostrare che  $A$ ,  $B$  e  $C$  non sono allineati.  
 b. Determinare l'equazione del piano  $ABC$ .  
 c. Determinare, in forma parametrica, le equazioni della retta passante per  $A$  e perpendicolare al piano  $ABC$ .  
 [Da Rivista Archimede 1/2015 proposte per la prova scritta a conclusione del liceo scientifico]
15. Nello spazio, riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali  $Oxyz$ , si considerino il piano  $\alpha$  di equazione  $2x - 2y - z = -9$  e la sfera  $S$  di equazione  $(x + 5)^2 + (y - 6)^2 + (z - 5)^2 = 100$ .  
 Detto  $G$  il cerchio ottenuto dall'intersezione tra il piano  $\alpha$  e la sfera  $S$ , se ne determinino il centro  $C$  ed il raggio  $r$ ; si calcoli infine il volume del cono avente vertice  $V(-1, 10, 3)$  e base  $G$ .  
 [Da Rivista Archimede 1/2015 proposte per la prova scritta a conclusione del liceo scientifico].
16. Nello spazio tridimensionale, sia  $r$  la retta passante per i punti  $A(-2, 0, 1)$  e  $B(0, 2, 1)$ .  
 Determinare le coordinate di un punto appartenente alla retta  $r$  che sia equidistante rispetto ai punti  $C(5, 1, -2)$  e  $D(1, 3, 4)$ .  
 [Quesito n°4, da simulazione MIUR del 2.4.2019 ]
17. Considerati i punti  $A(2, 3, 6)$ ,  $B(6, 2, -3)$ ,  $C(3, -6, 2)$  nello spazio tridimensionale, verificare che i segmenti  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  (dove il punto  $O$  indica l'origine degli assi) costituiscono tre spigoli di un cubo. Determinare il centro e il raggio della sfera  $S$  circoscritta a tale cubo.  
 [Quesito n°4 da Esame di Stato 2019 - Sessione suppletiva]
18. Dati i punti  $A(2, 0, -1)$  e  $B(-2, 2, 1)$ , provare che il luogo geometrico dei punti  $P$  dello spazio, tali che  $PA = \sqrt{2} PB$ , è costituito da una superficie sferica  $S$  e scrivere la sua equazione cartesiana. Verificare che il punto  $T(-10, 8, 7)$  appartiene a  $S$  e determinare l'equazione del piano tangente in  $T$  a  $S$ .  
 [Quesito n°4 da Esame di Stato 2019 – Sessione ordinaria]
19. Sono dati, nello spazio tridimensionale, i punti  $A(3, 1, 0)$ ,  $B(3, -1, 2)$ ,  $C(1, 1, 2)$ .  
 Dopo aver verificato che  $ABC$  è un triangolo equilatero e che è contenuto nel piano  $\alpha$  di equazione  $x + y + z - 4 = 0$ , stabilire quali sono i punti  $P$  tali che  $ABCP$  sia un tetraedro regolare.  
 [Quesito n°9, da Esame di Stato 2018 – Sessione ordinaria]