Traslazioni e iperbole

Daniela Valenti, 2025

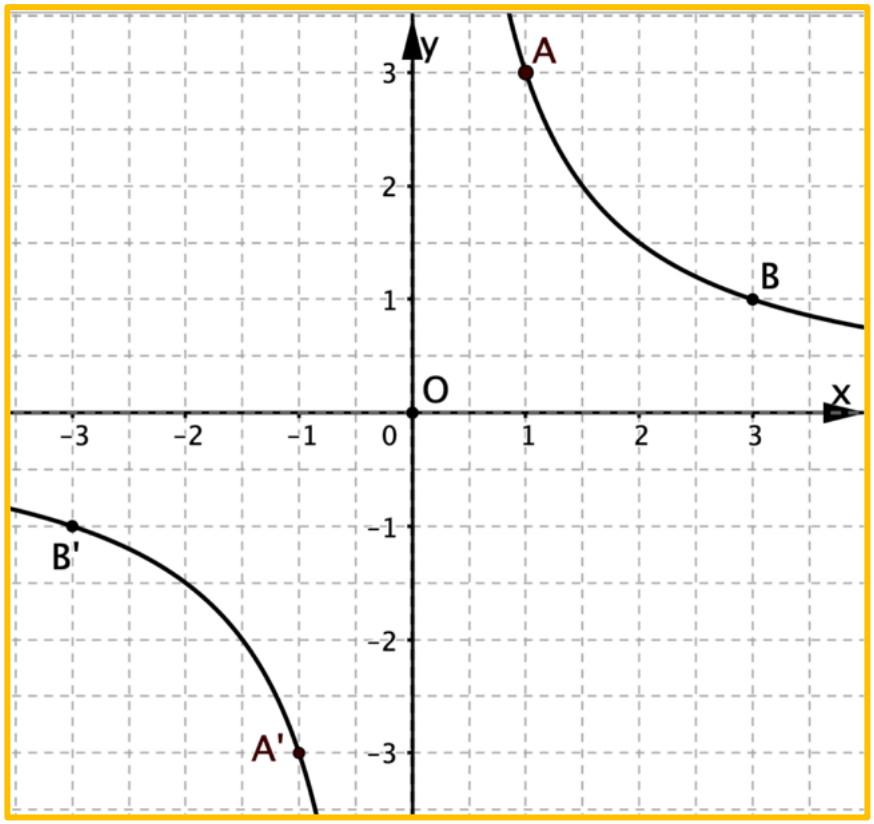
Equazione e grafico dell'iperbole

Esempio 1

Equazione

$$y = \frac{3}{x}$$

x	$y = \frac{3}{x}$
3	1
1	3
0	$\frac{3}{0}$ non esiste
–1	–3
–3	–1



Campo di esistenza della formula: insieme R_0 dei numeri reali diversi da 0

Daniela Valenti, 2025

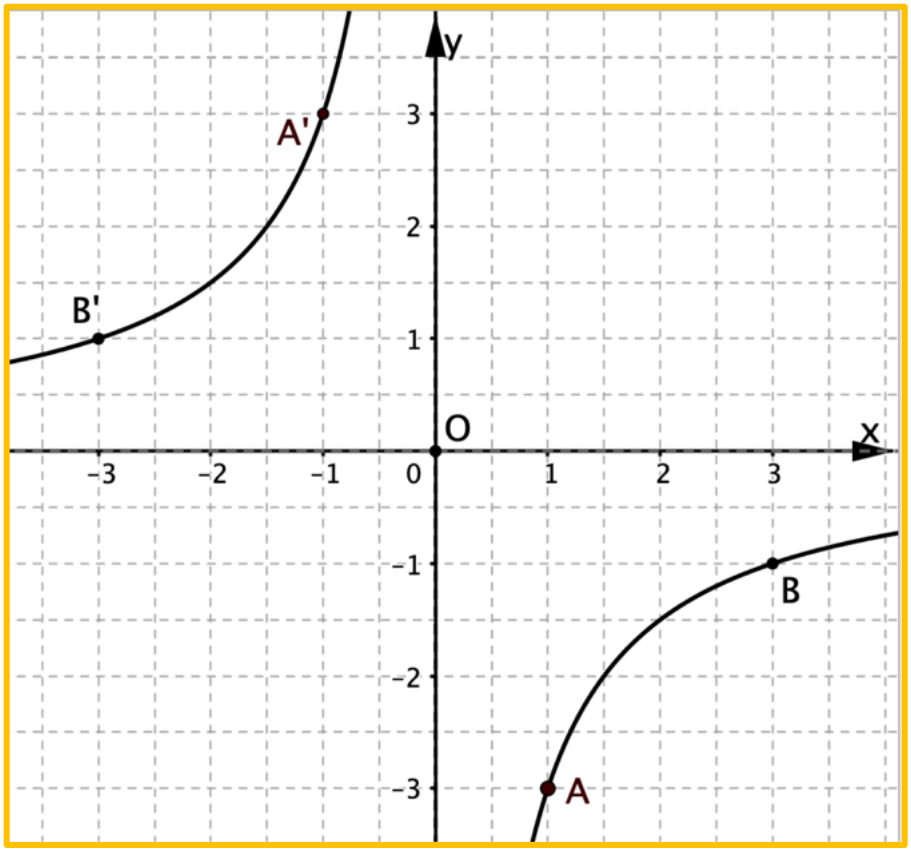
Equazione e grafico dell'iperbole

Esempio 2

Equazione

$$y = -\frac{3}{x}$$

x	$y = -\frac{3}{x}$
3	–1
1	–3
0	$-\frac{3}{0}$ non esiste
–1	3
–3	1



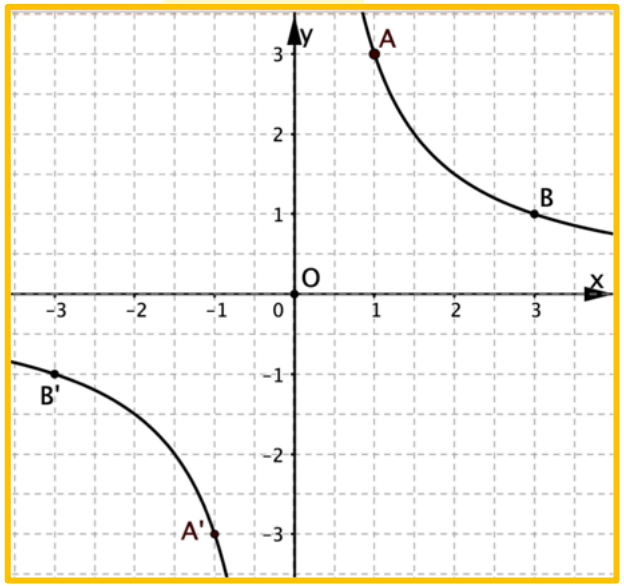
Campo di esistenza della formula: insieme R_0 dei numeri reali diversi da 0

Equazione e grafico dell'iperbole

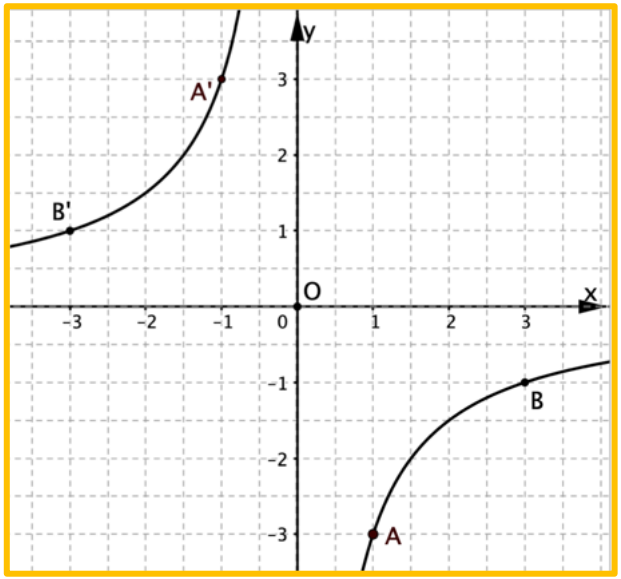
Equazione

$$y = \frac{k}{x}$$

$k > 0$



$k < 0$



Al posto di k posso sostituire un qualunque numero reale. Esempi

k	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$
$y = \frac{k}{x}$	$y = \frac{\frac{1}{2}}{x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2x}$	$y = \frac{-\frac{2}{3}}{x} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3x}$

Daniela Valenti, 2025

L’asse y è un asintoto dell’iperbole

La curva arriva a toccare l’asse y?

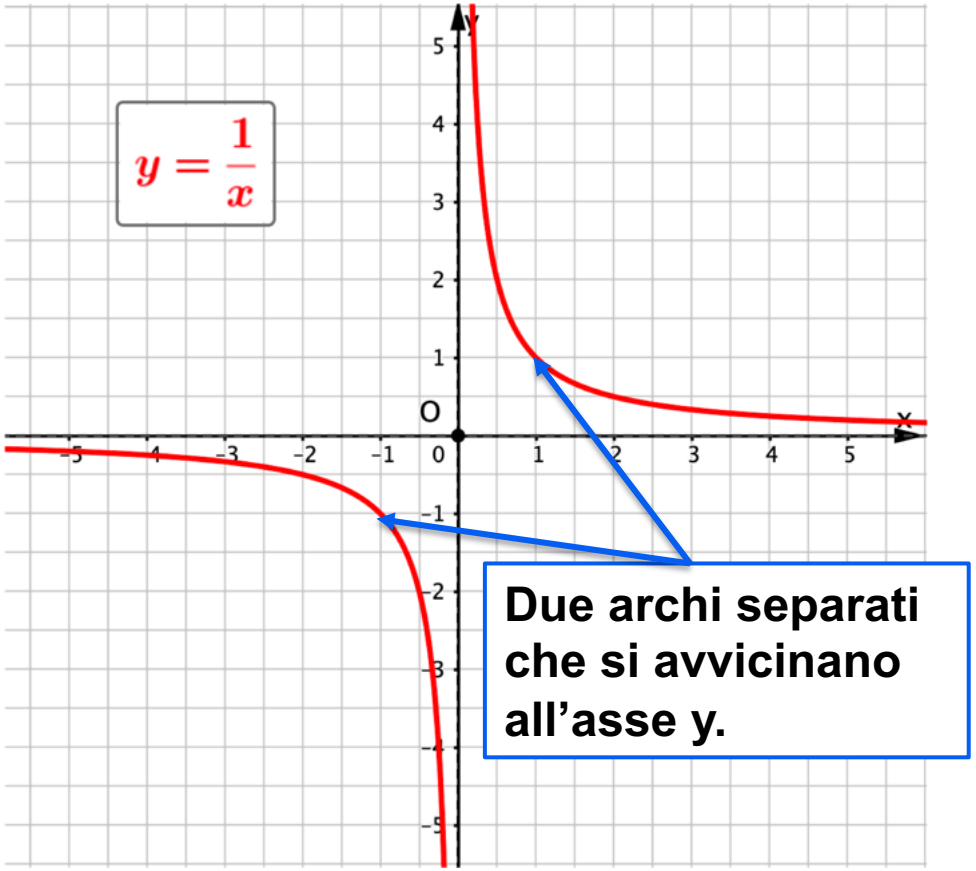
NO

Equazione dell’asse y: $x = 0$

x	0	…	0,0001	0,1
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{0}$ *y non esiste*	…	10000	10

Ma la curva si avvicina sempre più all’asse y, se sostituisco ad x numeri sempre più vicini a 0.

L’asse y è un asintoto dell’iperbole.



Asintoto parola di origine greca.
Significato: ‘che non incontra’

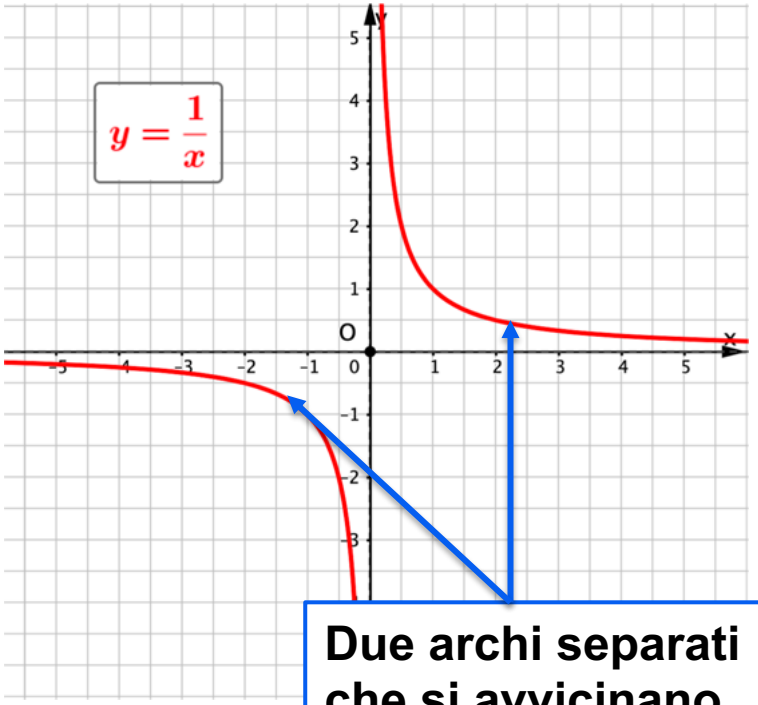
Gli asintoti dell'iperbole

La curva arriva a toccare l'asse x?

NO

Equazione dell'asse x: $y = 0$

x	10	10000	…	$\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{0}$ x non esiste
$y = \frac{1}{x}$	0,1	0,0001	…	0



Due archi separati che si avvicinano agli assi cartesiani

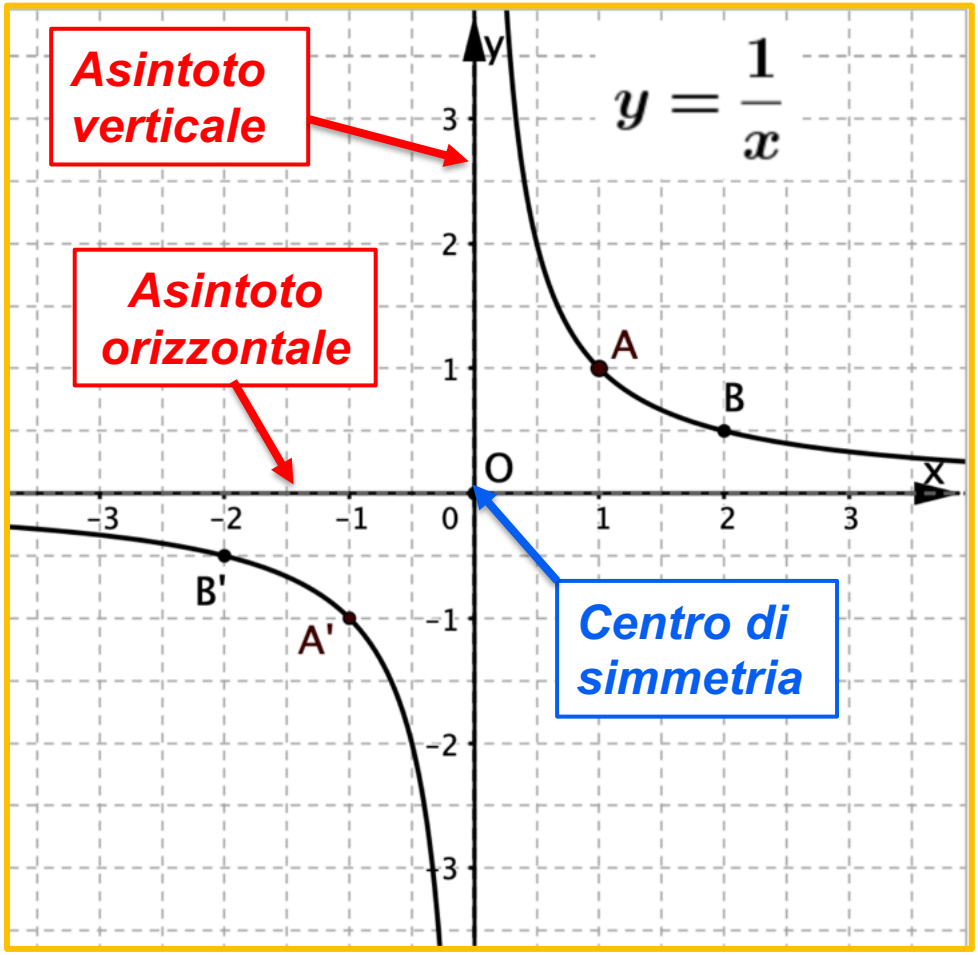
Ma la curva si avvicina sempre più all'asse x, se sostituisco ad x numeri sempre più grandi positivi o sempre più piccoli negativi.

Anche l'asse x è un asintoto dell'iperbole.

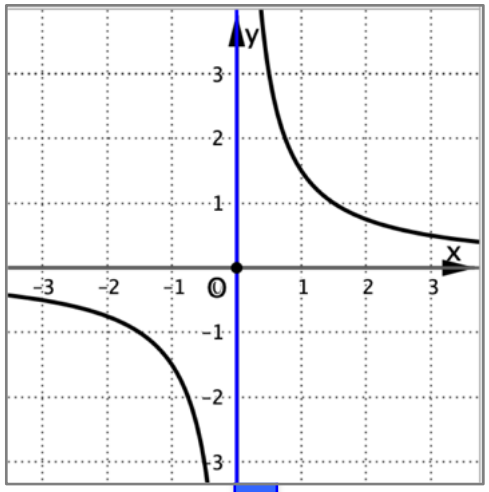
Gli asintoti dell'iperbole sono gli assi cartesiani

Centro di simmetria dell'iperbole

Il punto O di intersezione degli asintoti è il centro di simmetria dell'iperbole.

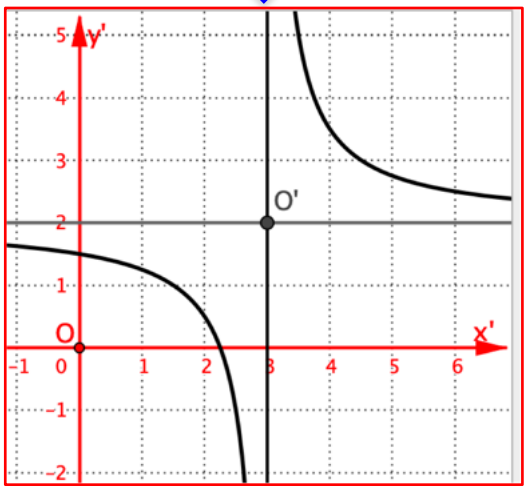


Traslare un'iperbole



Iperbole con:
- centro C = O(0; 0);
- asintoti gli assi cartesiani;
- equazione $y = \frac{3}{2x}$.

Traslo il piano



Iperbole con:
- centro C = O'(3; 2);
- asintoti paralleli agli assi cartesiani.

E l'equazione dell'iperbole traslata?

Per rispondere ricordo come applicare le equazioni di una traslazione.

Daniela Valenti, 2025

Applicare le equazioni di una trasformazione

Esempio	In generale
Traslazione che aggiunge 3 alle ascisse $\begin{cases} x' = x+3 \\ y' = y \end{cases}$ (*)	**Traslazione** $\begin{cases} x' = x+p \\ y' = y+q \end{cases}$ (°)
I. Si applica la traslazione (*) per trasformare punti A (1; 2) diventa A' $\begin{cases} x' = 1+3 \\ y' = 2 \end{cases}$	I. Si applica la traslazione (°) per trasformare punti A (1; 2) diventa A' $\begin{cases} x' = 1+p \\ y' = 2+q \end{cases}$
II. Per traslare grafici si applica la trasformazione inversa $\begin{cases} x = x'-3 \\ y = y' \end{cases}$	II. Per traslare grafici si applica la trasformazione inversa $\begin{cases} x = x'-p \\ y = y'-q \end{cases}$
$y = 2x$ diventa $y' = 2(x'-3)$	$y = 2x$ diventa $y'-q = 2(x'-p)$

Daniela Valenti, 2025

Equazione di iperbole traslata

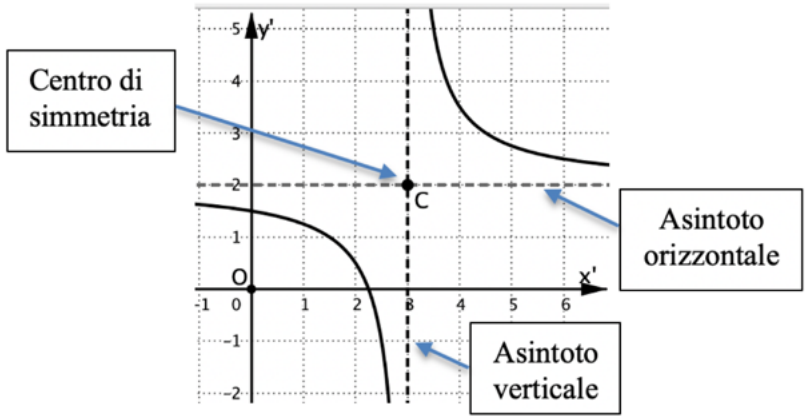
Esempio

ESEMPIO NUMERICO

Equazione dell'iperbole: $y = \frac{3}{2x}$

Traslazione $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 2 \end{cases}$ **Inversa** $\begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' - 2 \end{cases}$

Grafico



Equazione dell'asintoto verticale: $x' = 3$

Equazione dell'asintoto orizzontale: $y' = 2$

Centro di simmetria: C(3, 2)

Equazione dell'iperbole: $y' - 2 = \frac{3}{2(x'-3)}$

Scrivo l'equazione in altra forma

Esplicito y':

$$y' = 2 + \frac{3}{2(x' - 3)}$$

Eseguo le operazioni: $y' = \frac{4(x'-3)+3}{2(x'-3)} = \frac{4x'-12+3}{2x'-6}$

Semplifico e ottengo

$$y' = \frac{4x' - 9}{2x' - 6}$$

Equazione di iperbole traslata

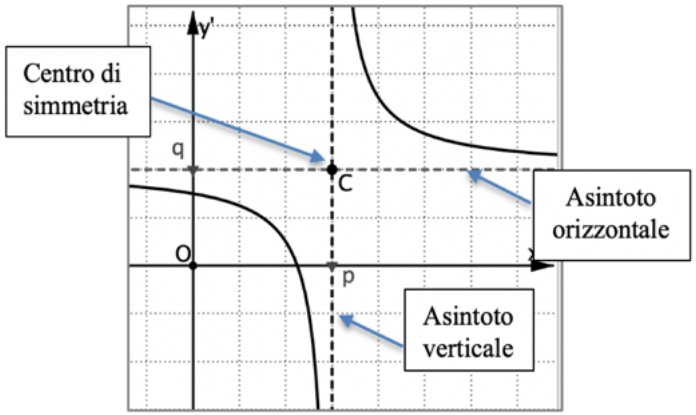
In generale

IN GENERALE

Equazione dell'iperbole: $y = \frac{k}{x}$

Traslazione $\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}$ **Inversa** $\begin{cases} x = x' - p \\ y = y' - q \end{cases}$

Grafico



Equazione dell'asintoto verticale: $x' = p$

Equazione dell'asintoto orizzontale: $y' = q$

Centro di simmetria: $C(p, q)$

Equazione dell'iperbole: $y' - q = \frac{k}{(x' - p)}$

Scrivo l'equazione in altra forma

Esplicito y':

$$y' = q + \frac{k}{x' - p}$$

Eseguo le operazioni, semplifico e ottengo

$$y' = \frac{ax' + b}{cx' + d}$$

Riconoscere l'equazione di un'iperbole con gli asintoti paralleli agli assi cartesiani

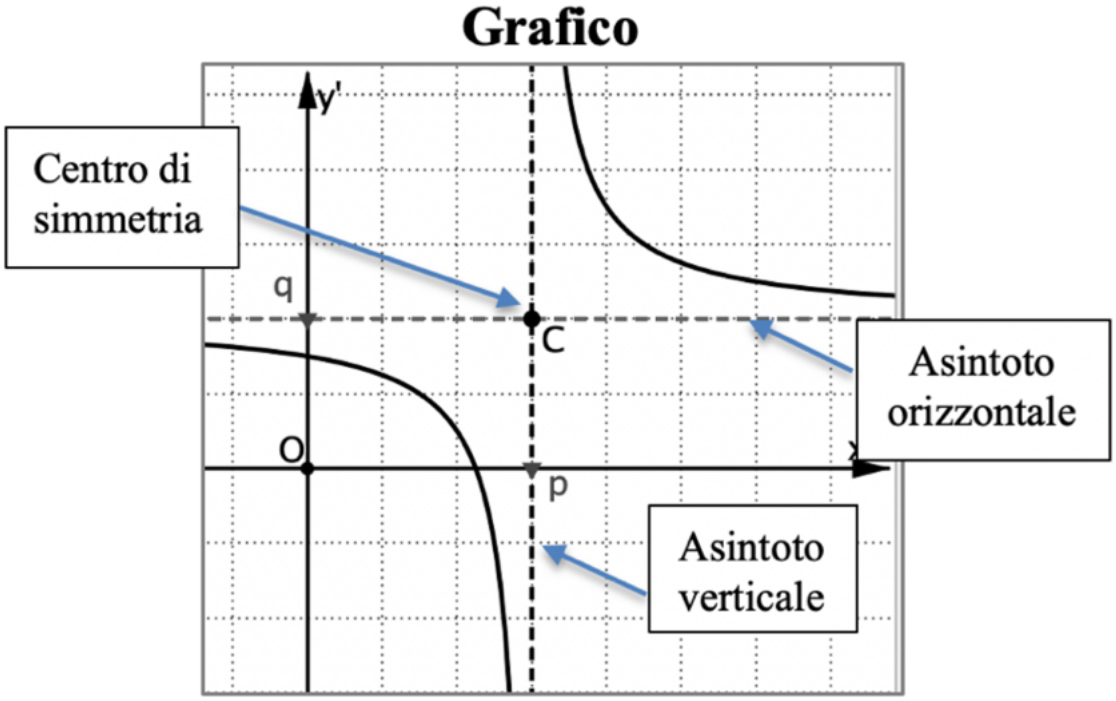
Ora dimentico traslazione e lettere con apici e concludo che:

Un'iperbole con centro C(p, q) e asintoti paralleli agli assi cartesiani è descritta da una delle seguenti equazioni:

$$y = q + \frac{k}{x-p}$$

oppure

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$



Attività

Completa la scheda per tracciare il grafico di un'iperbole a partire dalla sua equazione.

Riflessioni sui risultati dell'attività

Quesito 1. Grafico di un'iperbole di equazione

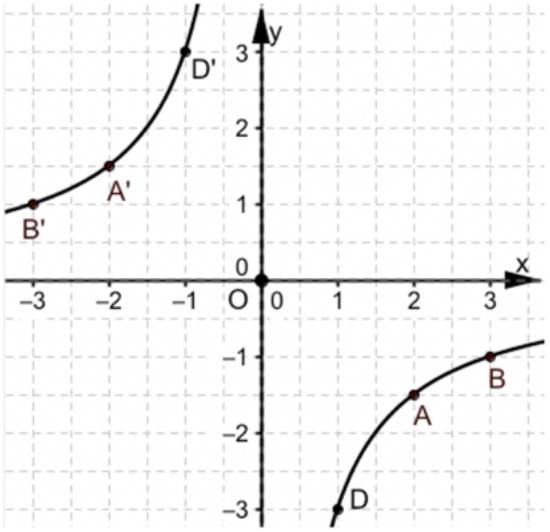
$$y = \frac{k}{x}$$

Equazione	$y = -\frac{3}{x}$
Equazione del tipo	$y = \frac{k}{x}$ con $k = -3$ *Asintoti:* ***gli assi cartesiani*** *Centro di simmetria:* ***O*(0; 0)**

Procedimento per tracciare il grafico

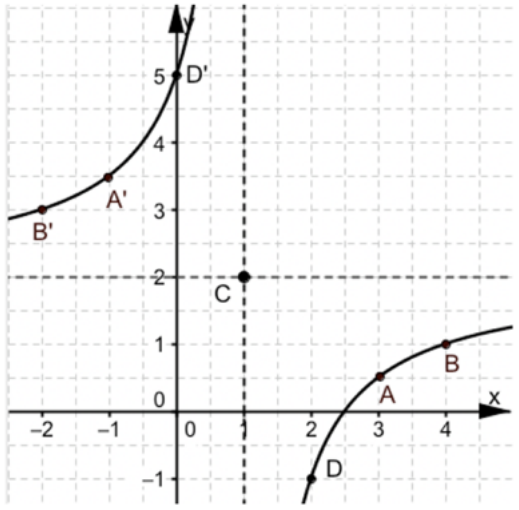
- ***Disegna asintoti e centro O di simmetria.***
- ***Compila la tabella per trovare tre punti A, B, D a destra del centro di simmetria.***
- ***Disegna un arco che raccorda A, B e D.***
- ***Disegna l'arco simmetrico rispetto al centro O di simmetria.***

x	1	2	3
$-\frac{3}{x}$	$-\frac{3}{1} = -3$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{3} = -1$



Quesito 1. Grafico di un'iperbole di equazione

$$y = \frac{k}{x-p} + q$$

Equazione	$y = -\frac{3}{x-1} + 2$
Equazione del tipo	$y = \frac{k}{x-p} + q$ con $\begin{cases} k = -3 \\ p = 1 \\ q = 2 \end{cases}$ *Asintoti d'equazione* $x = 1$ *e* $y = 2$ *Centro di simmetria:* $C(1; 2)$
Per tracciare il grafico • *Disegna asintoti e centro C di simmetria.* • *Compila la tabella per trovare tre punti A, B, D a destra del centro di simmetria.* • *Disegna un arco che raccorda A, B e D.* • *Disegna l'arco simmetrico rispetto al centro C di simmetria.* x | 2 | 3 | 4 y | -1 | $\frac{1}{2}$ | 1	

Quesito 2. Grafico di un'iperbole di equazione

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Il procedimento più rapido per tracciare il grafico è basato sulla divisione di polinomi per ricondurre l'equazione alla forma $y = \frac{k}{x-p} + q$.

Esempio

Tracciare il grafico dell'iperbole d'equazione

$$y = \frac{2x - 5}{x - 1}$$

Divisione di polinomi

$$\frac{2x-5}{x-1} = (2x-5):(x-1)$$

$$\begin{array}{r|l} 2x-5 & x-1 \\ \hline -2x+2 & 2 \\ \hline -3 & \end{array}$$

a. Divisione $2x : x = 2$

b. Moltiplicazione

$2\,(x-1) = 2x-2$

c. Sottrazione

$$2x-5$$
$$-2x+2 = -(2x-2)$$

$$2x-5 = 2(x-1)-3$$

$$\frac{2x-5}{x-1} = \frac{2(x-1)-3}{x-1} = 2 - \frac{3}{x-1}$$

$$\frac{2x-5}{x-1} = 2 - \frac{3}{x-1}$$

Quesito 2. Grafico di un'iperbole di equazione

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

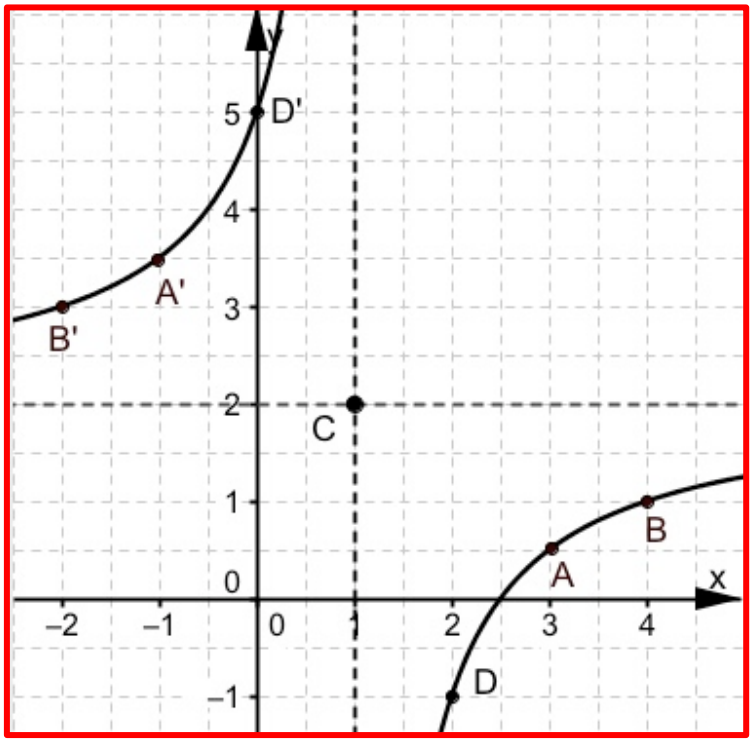
Trovo che l'equazione

$$y = \frac{2x - 5}{x - 1}$$

si può scrivere nella forma

$$y = 2 - \frac{3}{x - 1}$$

Perciò abbiamo già disegnato il suo grafico nel quesito 1.



Procedimento per disegnare un'iperbole con gli asintoti paralleli agli assi cartesiani

Procedimento valido solo se l'equazione è del tipo

$$y = \frac{k}{x-p} + q$$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Attenzione nel riconoscere l'equazione!

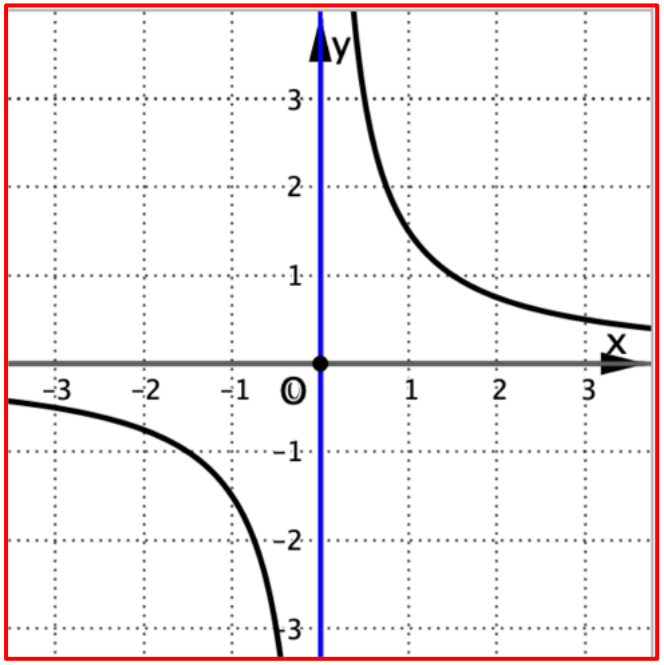
Riconoscere l'equazione di un'iperbole con gli asintoti paralleli agli assi cartesiani

Esempi per riflettere

Equazione	Del tipo $y = \frac{k}{x-p} + q$	Del tipo $y = \frac{ax+b}{cx+d}$	Non è equazione di iperbole con asintoti paralleli agli assi cartesiani
$y = \frac{x}{2} + 3$			$y = \frac{x}{2} + 3 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 3$ Del tipo $y = mx + q$ è l'equazione di una retta
$y = \frac{1}{2x} + 3$	$y = \frac{\frac{1}{2}}{x} + 3$ $k = \frac{1}{2}$ e $q = 3$		
$y = \frac{2x}{4x^2 + 3}$			$4x^2 + 3$ è di 2° grado
$y = \frac{2x}{4x + 3}$		$a = 2, b = 0,$ $c = 4, d = 3$	

Vocabolario matematico

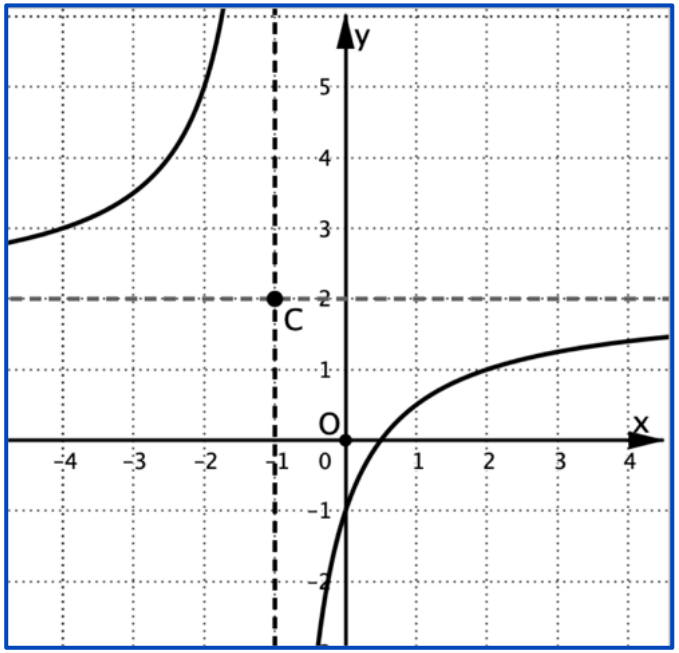
L'iperbole che ha come asintoti gli assi cartesiani



$$y = \frac{k}{x}$$

Prende anche il nome di *'iperbole riferita agli asintoti'*

La funzione che ha come grafico un'iperbole con asintoti paralleli agli assi cartesiani



$$y = \frac{k}{x-p} + q \qquad y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

Prende anche il nome di *'funzione omografica'*