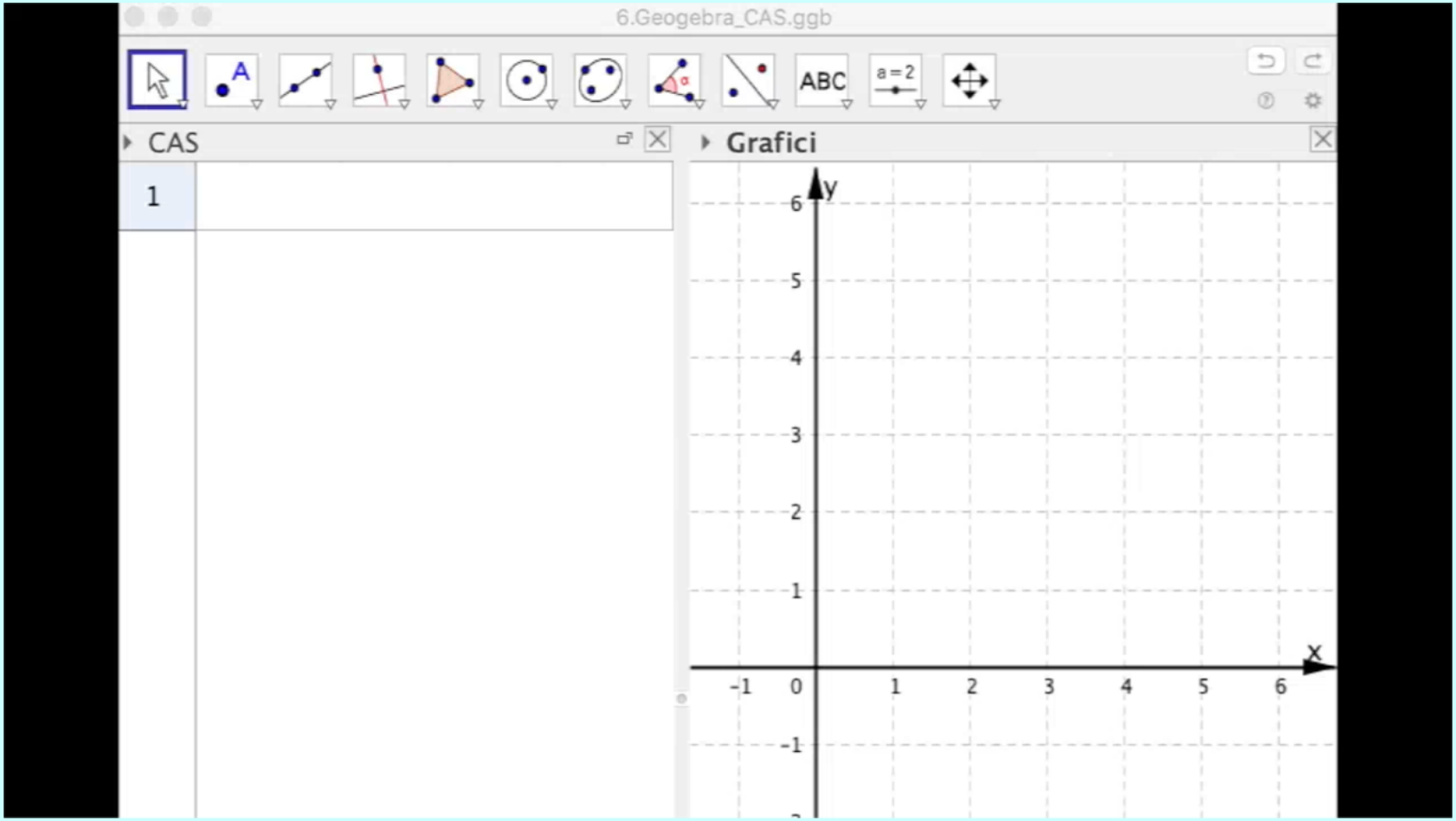
# Leggi matematiche, curve e funzioni

*Daniela Valenti, 2021*

# Ricordo l’equazione di una retta

**Finora hai lavorato con equazioni di rette nel piano cartesiano.**
**Ecco un video per ricordare l’equazione di una retta.**

# Significato dell'equazione di una retta




**Video1**

# Leggi lineari

## Che cosa ti ricorda il video

**La formula** $y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$ **è uno strumento notevole.**

**E' una legge matematica che lega $x$ e $y$. Così posso ottenere tutti i punti che compongono una retta: un elenco di infiniti punti e un grafico racchiusi in una formula!**

| $x$ | $-1$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | … | $100$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$ | $0$ | $\frac{1}{5} = 0{,}2$ | $\frac{3}{10} = 0{,}3$ | $\frac{2}{5} = 0{,}4$ | | $\frac{101}{5} = 20{,}2$ | |

**Una formula del tipo $y = mx + q$ prende anche il nome di *'legge lineare'.***

# Leggi lineari per risolvere problemi

**La realtà suggerisce vari fenomeni che conducono a risolvere problemi lineari: sono i problemi che conducono a scrivere leggi lineari, cioè leggi che hanno per grafico una retta. Ecco un esempio.**

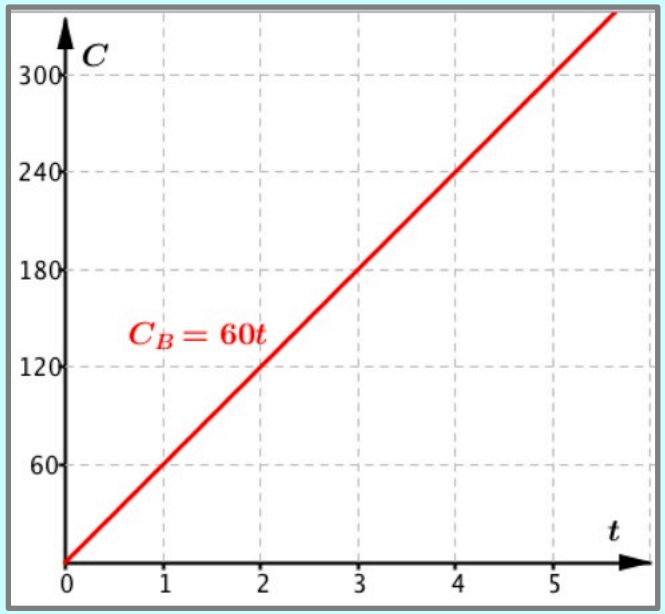
**Quanto costa l'abbonamento ad una palestra?**

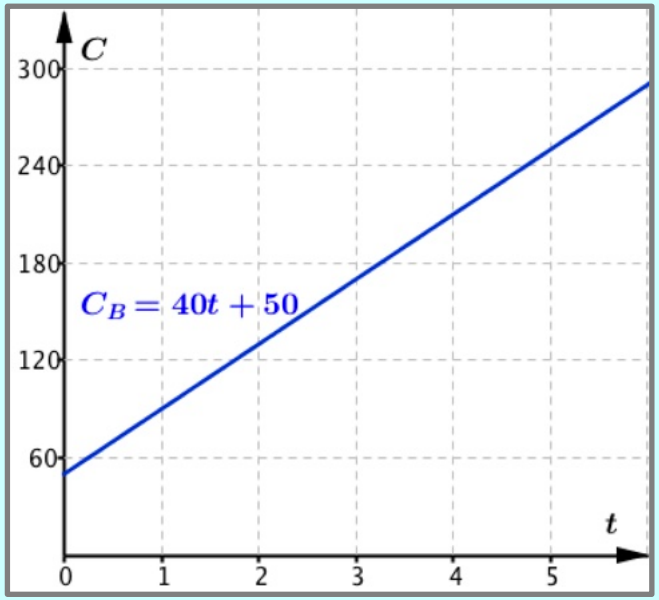


# Riconoscere leggi lineari

**Riconosco leggi lineari, anche quando le variabili sono indicate con lettere diverse da $x$ e $y$.**

$$C_A = 40t + 50 \qquad C_B = 60t$$



# Non solo problemi lineari

**Finora dunque hai seguito questo percorso:**

- **avevi il grafico di una retta;**
- **nel piano cartesiano hai trovato la legge lineare che descrive la retta;**
- **hai applicato la legge lineare per risolvere problemi.**

**Molto spesso realtà e scienza portano a seguire un altro percorso:**

- **un problema suggerisce una legge matematica che non è lineare;**
- **debbo tracciare il grafico della legge per risolvere il problema.**

# Attività. Leggi matematiche, curve funzioni

**Completa la scheda di lavoro per esaminare problemi lineari e non lineari**

# Due punti fondamentali del tuo lavoro

A. **Il significato del termine ‘funzione’ in matematica è cambiato nel corso della storia.**
B. **Notevoli applicazioni alla geometria analitica del significato di ‘funzione’ più diffuso oggi nella comunità scientifica.**

**Rivediamo prima di tutto alcune tappe significative del lungo percorso storico**

# A. Il concetto di funzione si evolve

## 1. Fermat e Cartesio ‘inventano’ la geometria analitica



**Fermat (1637)**

**«Ogni volta che due quantità incognite sono legate da un’equazione, si ha una linea che può essere retta o curva»**



**Cartesio (1637)**

**«Prendendo successivamente infinite diverse grandezze per la linea $x$, se ne troveranno altrettante infinite per la linea $y$ e così si avrà un’infinità di diversi punti per mezzo dei quali si descrive la curva richiesta»**

# A. Il concetto di funzione si evolve

## 1. Fermat e Cartesio ‘inventano’ la geometria analitica



**Fermat (1637)**

**«Ogni volta che due quantità incognite sono legate da un’equazione, si ha una linea che può essere retta o curva»**



**Cartesio (1637)**

**«Prendendo successivamente infinite diverse grandezze per la linea $x$, se ne troveranno altrettante infinite per la linea $y$ e così si avrà un’infinità di diversi punti per mezzo dei quali si descrive la curva richiesta»**

# A. Il concetto di funzione si evolve

## 2. Cauchy e Weierstrass





**Cauchy (1857)**

**«Due variabili reali o, in altri termini, due quantità algebriche variabili si dicono funzioni una dell'altra quando variano simultaneamente in modo che il valore dell'una determini il valore dell'altra».**

**Weierstrass (1878)**

**«Se una quantità variabile reale, che diremo $y$, è legata ad un'altra quantità variabile reale $x$, in modo che, ad un certo valore di $x$, corrispondano uno o più valori determinati per $y$, si dirà che $y$ è funzione di $x$ …»**

# A. Il concetto di funzione si evolve

## 3. Il gruppo Bourbaki



**Dieudonné (1969)**

**«Siano E ed F due insiemi, distinti o no. Una relazione fra una variabile x di E e una variabile y di F è detta relazione funzionale di E verso F, se, qualunque sia x in E, esiste un elemento y di F, e uno solo, che stia nella relazione considerata con x…»**

*Obiettivo della ricerca:* risistemare tutta la matematica basandola su un unico fondamento, la teoria degli insiemi.

# A. Il concetto di funzione si evolve

## 4. Reazioni all'impostazione "bourbakista"

**Il commento di Thom (1974)**

**«È caratteristico che, dall'immenso sforzo di sistemazione di Bourbaki non sia uscito alcun teorema nuovo di qualche importanza»**

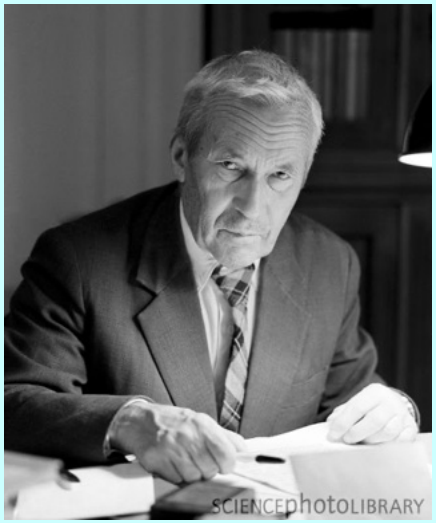


*Un eterno dilemma della matematica:*
scoprire nuovi risultati o sistemare logicamente i risultati noti?

Bourbaki o Thom?

# A. Il concetto di funzione si evolve

## 5. Una definizione più 'snella'



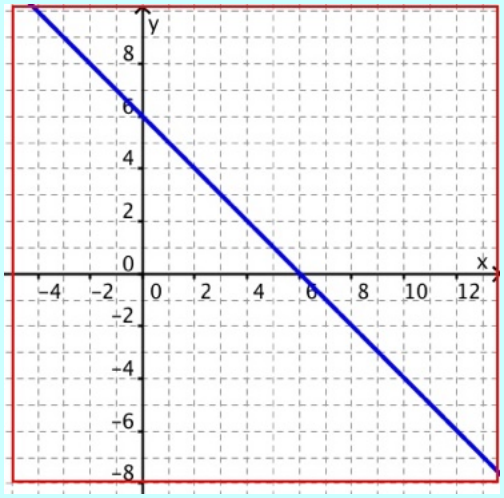

**Kolmogorov (1974)**

**«Si può intendere una funzione come una legge arbitraria che, ad ogni $x$ appartenente ad un insieme D (detto dominio della funzione), fa corrispondere una sola $y$ appartenente ad un insieme C (detto codominio della funzione)» .**

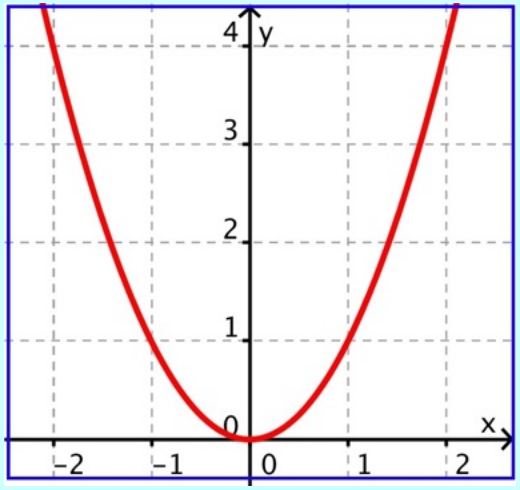
***Questo è il significato più diffuso di 'funzione' anche oggi nella comunità scientifica.***

# B. Geometria analitica e linguaggio delle funzioni

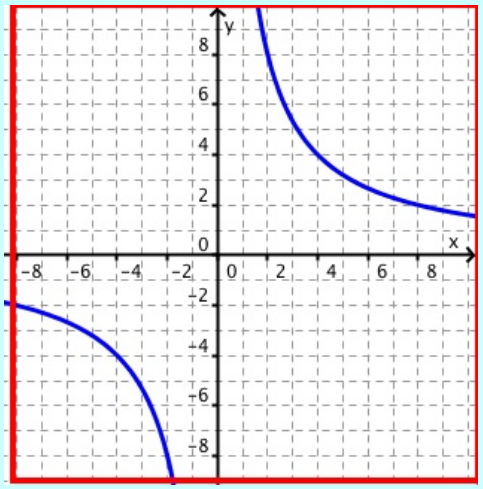
## Geometria analitica




Equazione: $y = -x + 6$




Equazione: $y = x^2$




Equazione: $y = \frac{16}{x}$

**Non si parlava di '*Dominio*' all'epoca di Cartesio.**
**Come si può rivedere la geometria analitica alla luce del più recente concetto di funzione?**

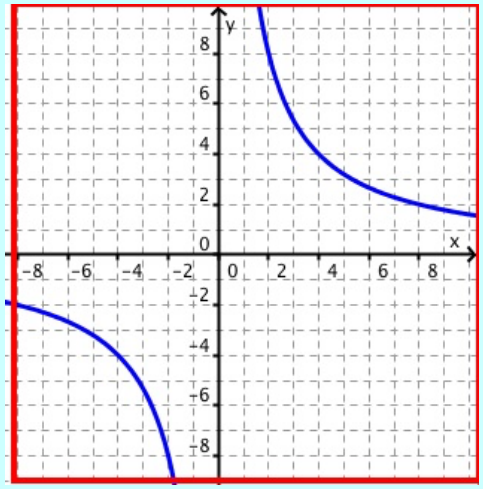
***È sottinteso come 'Dominio' l'insieme di tutti i numeri reali che, sostituiti ad $x$ nella formula, producono un numero reale $y$***

**Per precisare meglio, il *'Dominio sottinteso'* prende talvolta il nome di *'Campo di esistenza della formula'***

# B. Geometria analitica e linguaggio delle funzioni

**Con una formula posso creare più funzioni: basta modificare il dominio. Ecco un primo esempio.**

**Geometria analitica**

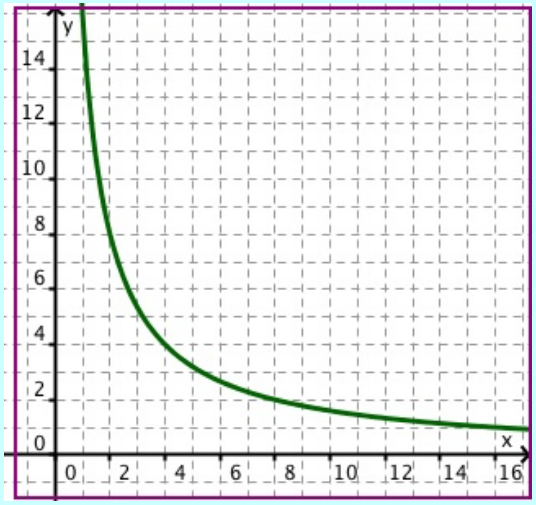



**Equazione:** $y = \frac{16}{x}$

**Non si può dividere per 0**

***Campo di esistenza della formula:*** ***l'insieme $R_0$*** **dei numeri reali diversi da 0**

**x, y lati di rettangoli di area 16**




***Dominio:*** **l'insieme $R_0^+$ dei numeri reali positivi**

***Codominio:*** **l'insieme $R_0^+$**

***Legge:*** $y = \frac{16}{x}$

## Sono due funzioni diverse

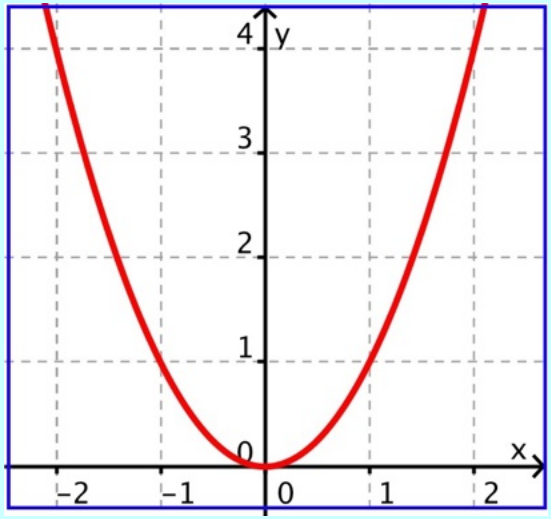


*Daniela Valenti, 2021*

# B. Geometria analitica e linguaggio delle funzioni

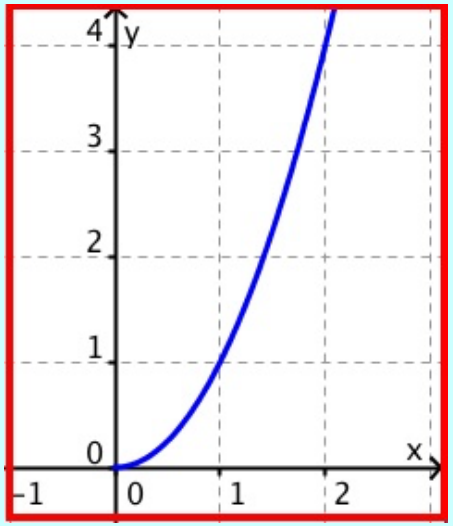
**Con una formula posso creare più funzioni: basta modificare il dominio. Ecco un secondo esempio.**

**Geometria analitica**




**Equazione: $y = x^2$**
***Campo di esistenza della formula:*** **l'insieme *R* dei numeri reali**

**Area $y$ del quadrato di lato $x$**




***Dominio:*** **l'insieme $R^+$ dei numeri reali non negativi**
***Codominio:*** **l'insieme $R^+$**
***Legge:*** **$y = x^2$**

**Sono due funzioni diverse**

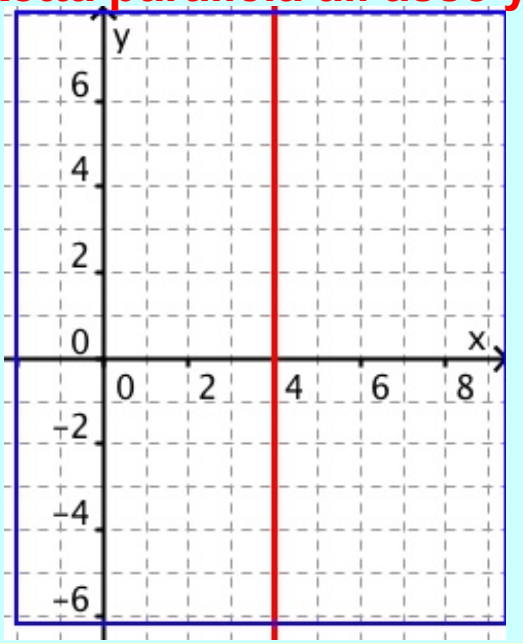


Daniela Valenti, 2021

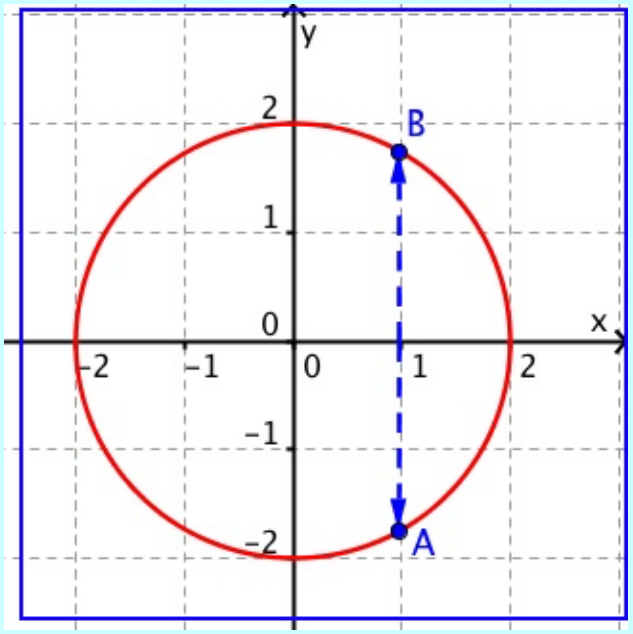
# B. Geometria analitica e linguaggio delle funzioni

**Ci sono linee disegnate sul piano cartesiano che non sono il grafico di una funzione. Ecco due esempi**

**Retta parallela all'asse y**




**Circonferenza**




**Non è vero che ad una *x* corrisponde una sola *y***

**Non sono il grafico di una funzione secondo la definizione di Bourbaki, …. ma secondo le precedenti definizioni di Cauchy e Weierstrass?**

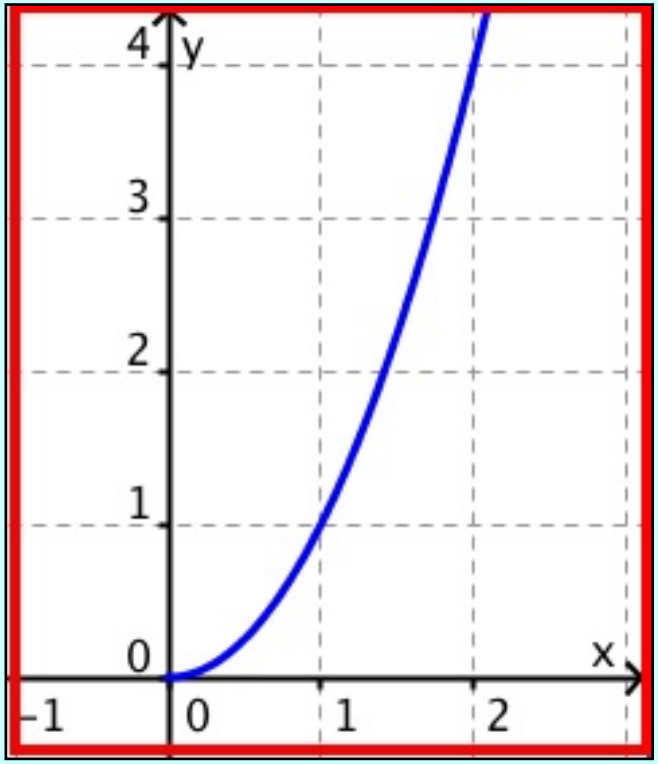
# Leggi matematiche non lineari

**Fisso infine l'attenzione su due leggi matematiche non lineari che hai ritrovato nell'attività.**

I. **Legge quadratica o parabolica**
II. **Legge di proporzionalità inversa o iperbolica**

# I. Legge quadratica

**Area $y$ del quadrato di lato $x$**

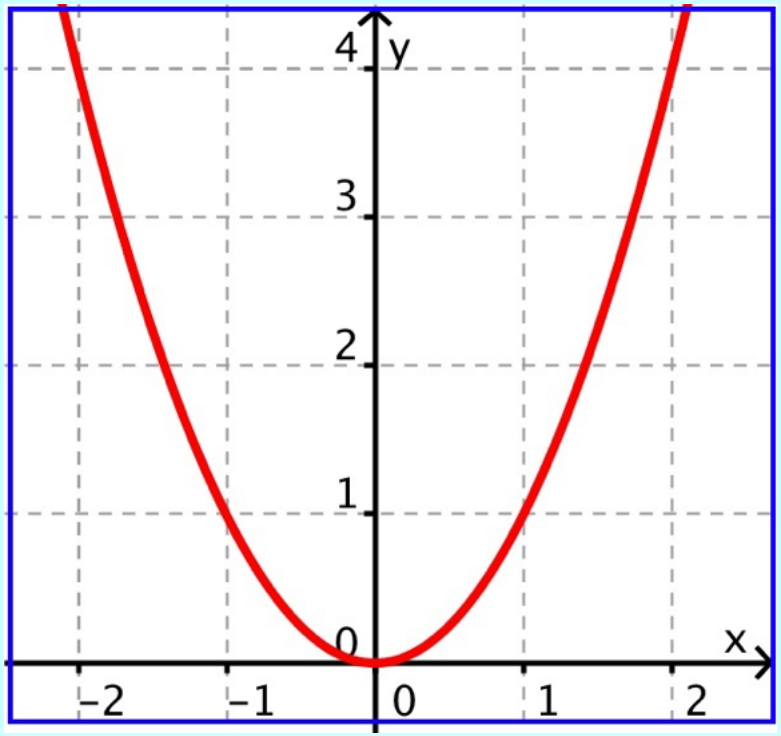



***Dominio:*** **l'insieme $R^+$**
***Codominio:*** **l'insieme $R^+$**
***Legge:*** $y = x^2$

# Legge quadratica sul piano cartesiano

**Geometria analitica**

| $x$ | $y = x^2$ |
|---|---|
| –2 | 4 |
| –1 | 1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |



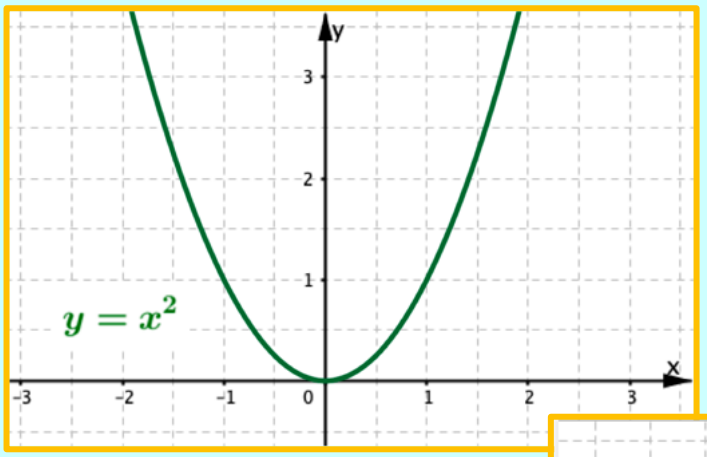

**Equazione:** $y = x^2$

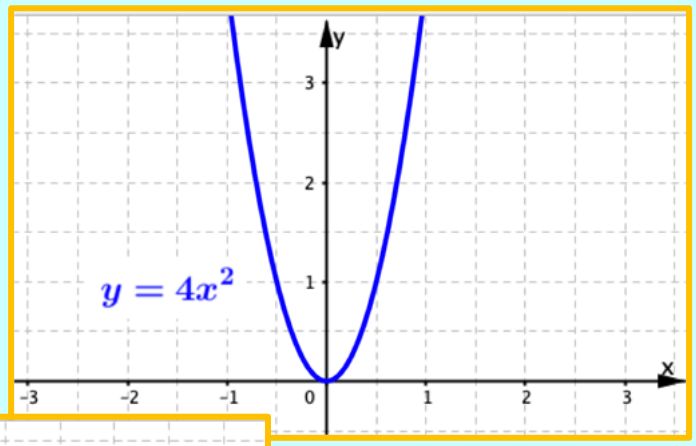
***Campo di esistenza della formula:***
***l'insieme R* dei numeri reali**

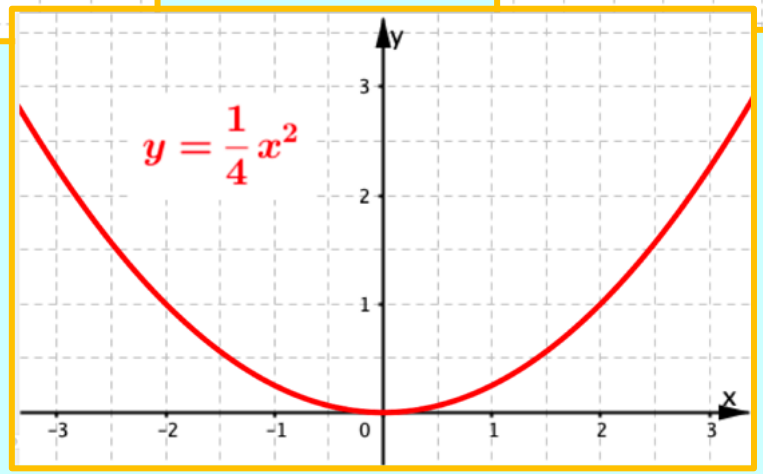
# Parabole in geometria analitica

**Sono parabole le curve d'equazione**

$$y = x^2,\ y = 4x^2,\ y = \frac{1}{4}x^2,\ \ldots$$

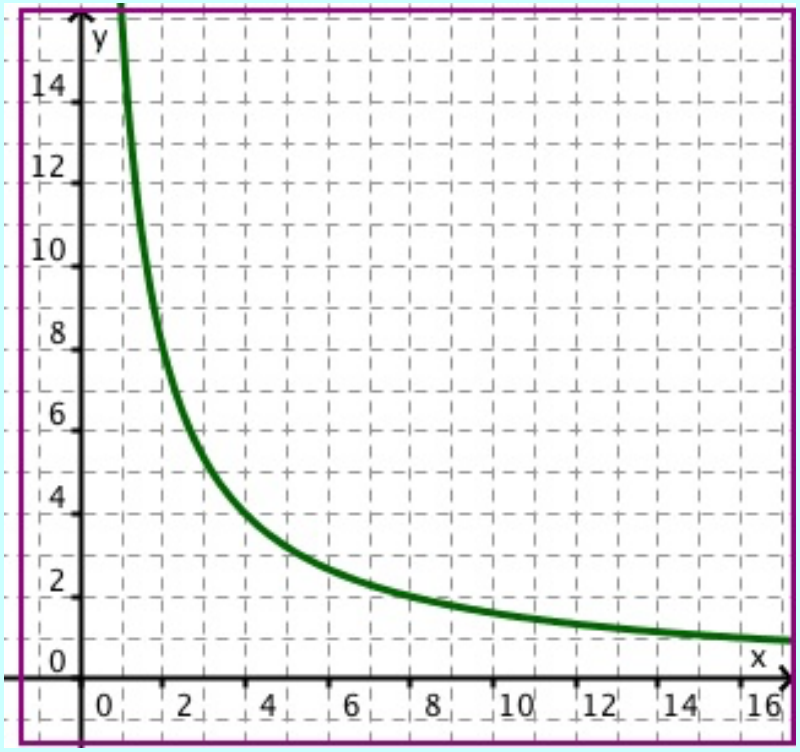


# II. Legge iperbolica o di proporzionalità inversa

$x, y$ **lati di rettangoli di area 16**




***Dominio:*** **l'insieme $R_0^+$**
***Codominio:*** **l'insieme $R_0^+$**
***Legge:*** $y = \frac{16}{x}$

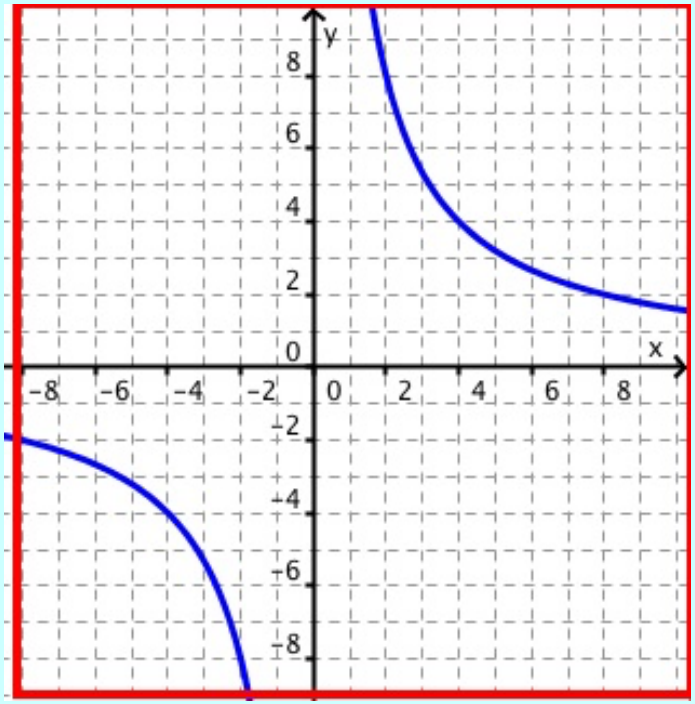


Daniela Valenti, 2021

# Proporzionalità inversa sul piano cartesiano

**Geometria analitica**

| $x$ | $y = \frac{16}{x}$ |
|---|---|
| –8 | –2 |
| –2 | –8 |
| 0 | Non esiste |
| 2 | 8 |
| 8 | 2 |




**Equazione:** $y = \frac{16}{x}$

***Campo di esistenza della formula: l'insieme $R_0$***

# Iperboli in geometria analitica

**Sono iperboli le curve d'equazione**

$$y = \frac{1}{x}\,,\; y = \frac{2}{x}\,,\; y = \frac{1}{2x}\,,\; \ldots$$

