

Coordinate cartesiane nello spazio

Equazioni di rette e circonferenze nello spazio

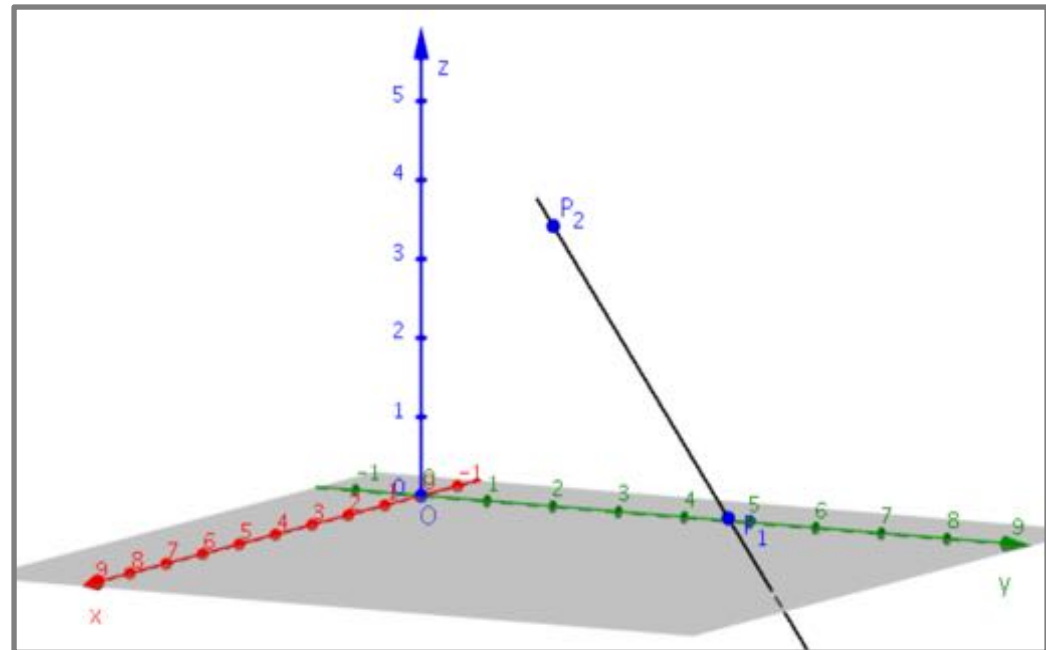
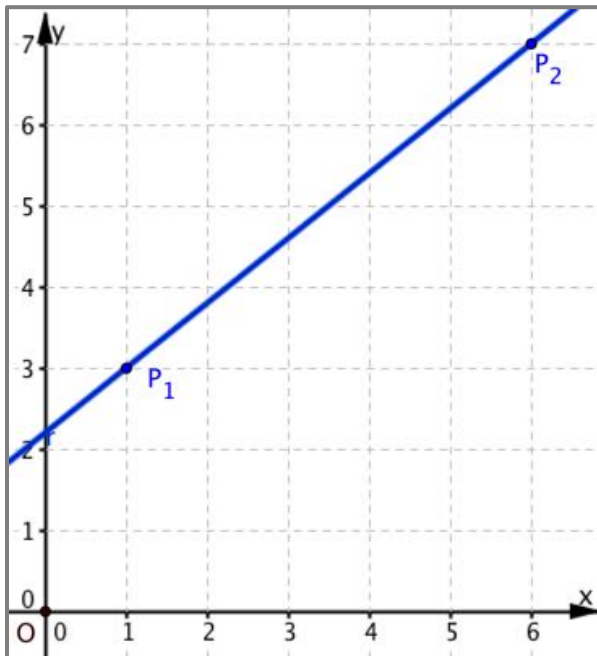
Dal piano allo spazio

Ricordiamo quello che conosciamo sulla retta nel piano cartesiano e, per analogia, troviamo equazioni e proprietà della retta nello spazio.

PIANO

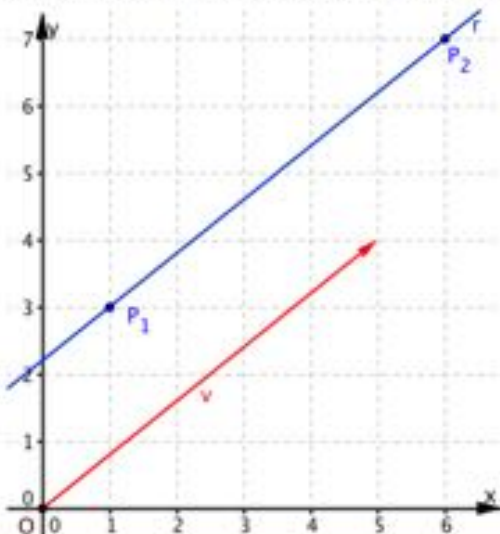


SPAZIO



Per due punti passa una sola retta.

Retta nel piano: vettore direzione

RETTE NEL PIANO	
Esempio	In generale
Retta r per $P_1(1; 3)$ e $P_2(6; 7)$	Retta r per $P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_2; y_2)$
Vettore direzione	
$\frac{x-1}{6-1} = \frac{y-3}{7-3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{\boxed{5}} = \frac{y-3}{\boxed{4}}$ Il vettore $v(\mathbf{5}, \mathbf{4})$ è parallelo ad r, perciò dà la direzione della retta r 	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Leftrightarrow \frac{x-x_1}{\boxed{l}} = \frac{y-y_1}{\boxed{m}}$ Il vettore $v(\mathbf{l}, \mathbf{m})$ dà la direzione della retta r che passa per P_1 e P_2. <i>Perciò individuo una retta nel piano cartesiano con:</i> - due punti P_1 e P_2 - oppure - un punto P_1 e un vettore $v(\mathbf{l}, \mathbf{m})$

Retta nel piano: equazioni parametriche

RETTE NEL PIANO	
Esempio	In generale
Retta r per $P_1(1; 3)$ e $P_2(6; 7)$	Retta r per $P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_2; y_2)$
$\frac{x-1}{5} = \frac{y-3}{4} = t \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 5t \\ y-3 = 4t \end{cases}$ Otengo così le <i>equazioni parametriche</i> $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 3 + 4t \end{cases}$	$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = t \Rightarrow \begin{cases} x-x_1 = lt \\ y-y_1 = mt \end{cases}$ Otengo così le <i>equazioni parametriche</i> $\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \end{cases}$
Le equazioni parametriche descrivono le coordinate (x, y) di un punto P che percorre la retta, mentre il parametro t assume tutti i valori reali	

Retta nello spazio: vettore direzione

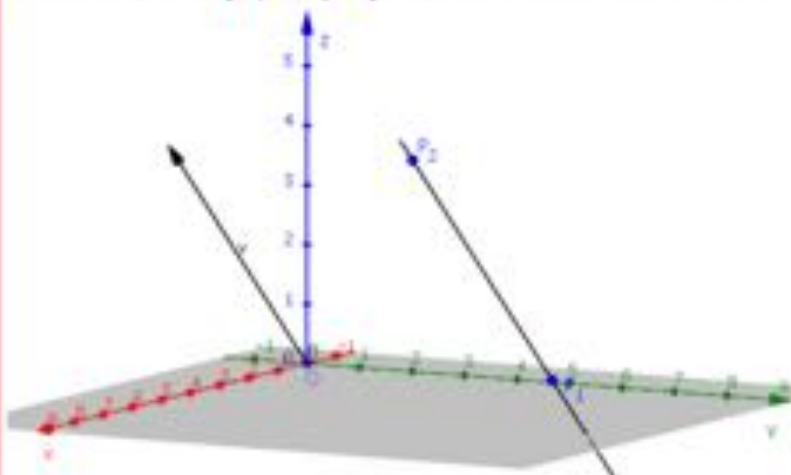
RETTE NELLO SPAZIO

Esempio

Retta r per $P_1(6; 8; 1)$ e $P_2(9; 7; 5)$

$$\frac{x-6}{9-6} = \frac{y-8}{7-8} = \frac{z-1}{5-1} \Leftrightarrow \frac{x-6}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-1}{4}$$

Il vettore $v(3, -1, 4)$ dà la direzione di r



In generale

Retta r per $P_1(x_1; y_1; z_1)$ e $P_2(x_2; y_2; z_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \Leftrightarrow \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$$

Il vettore $v(l, m, n)$ dà la direzione della retta r .

Perciò anche nello spazio individuo una retta:

- con due punti P_1 e P_2

oppure

- con un punto P_1 e un vettore $v(l, m, n)$

Retta nello spazio: equazioni parametriche

RETTE NELLO SPAZIO

Esempio

Retta r per $P_1(6; 8; 1)$ e $P_2(9; 7; 5)$

$$\frac{x-6}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-1}{4} = t \Rightarrow \begin{cases} x-6 = 3t \\ y-8 = -t \\ z-1 = 4t \end{cases}$$

Otengo così le *equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 8 - t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$$

In generale

Retta r per $P_1(x_1; y_1; z_1)$ e $P_2(x_2; y_2; z_2)$

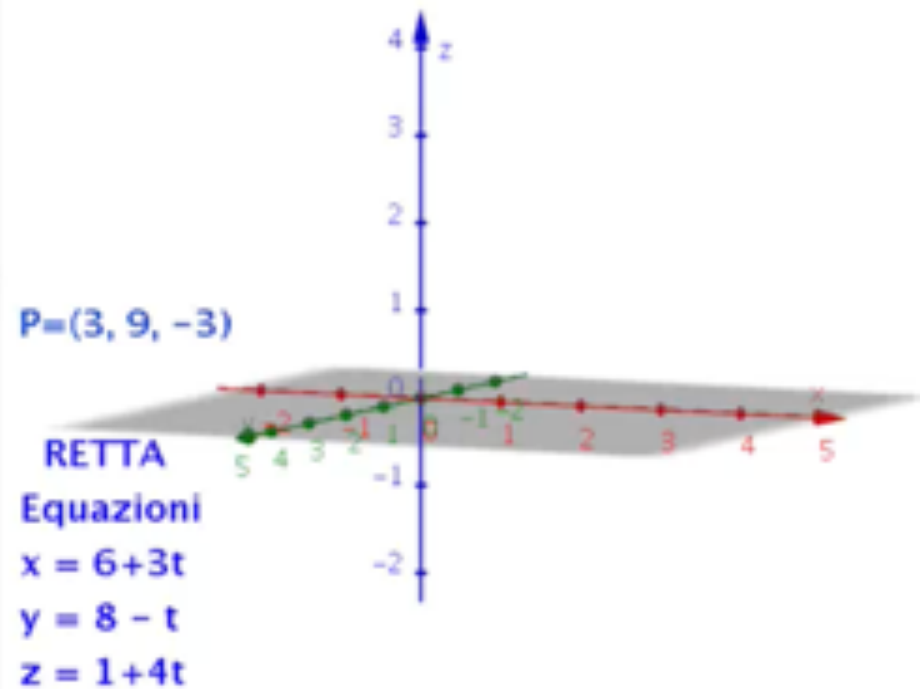
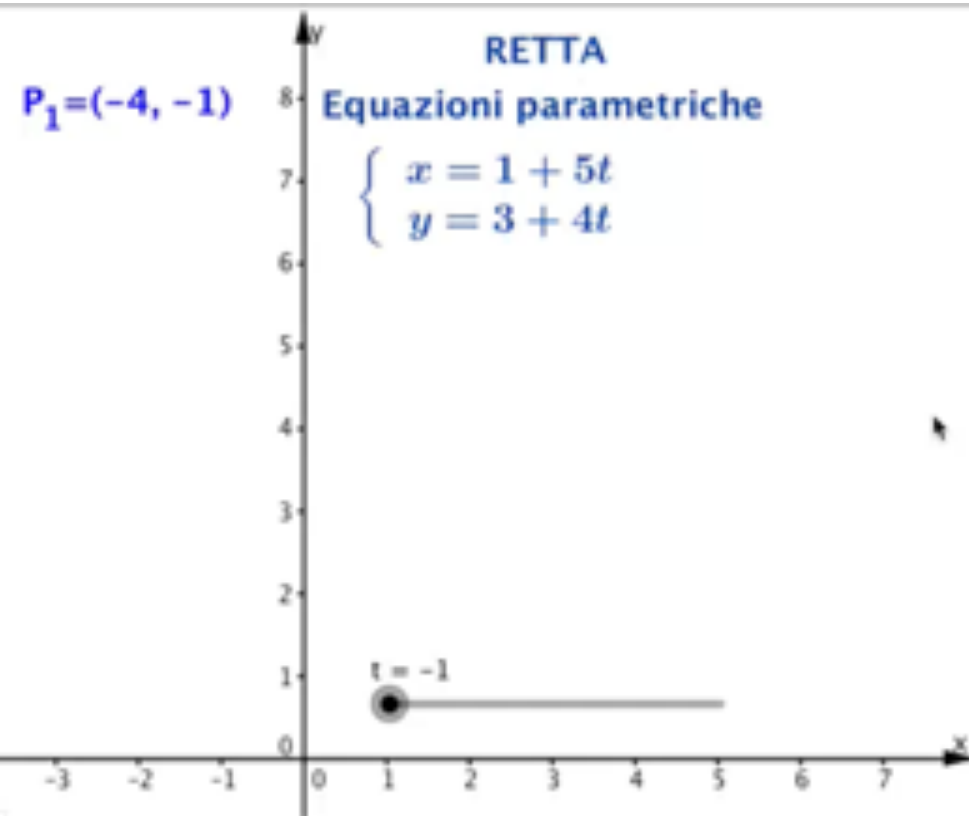
$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} = t \Rightarrow \begin{cases} x-x_1 = lt \\ y-y_1 = mt \\ z-z_1 = nt \end{cases}$$

Otengo così le *equazioni parametriche*

$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \\ z = z_1 + nt \end{cases}$$

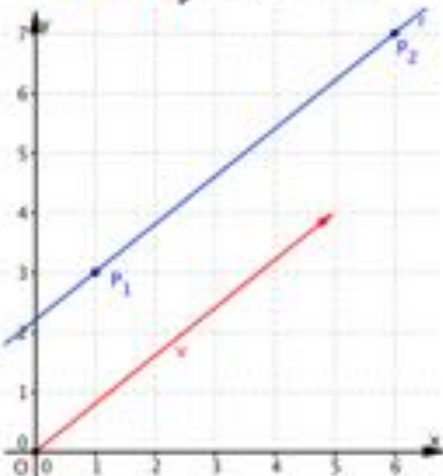
Le **equazioni parametriche** descrivono le coordinate (x, y, z) di un punto P che percorre la retta, mentre **il parametro t** assume tutti i valori reali

Retta: equazioni parametriche nel piano e nello spazio

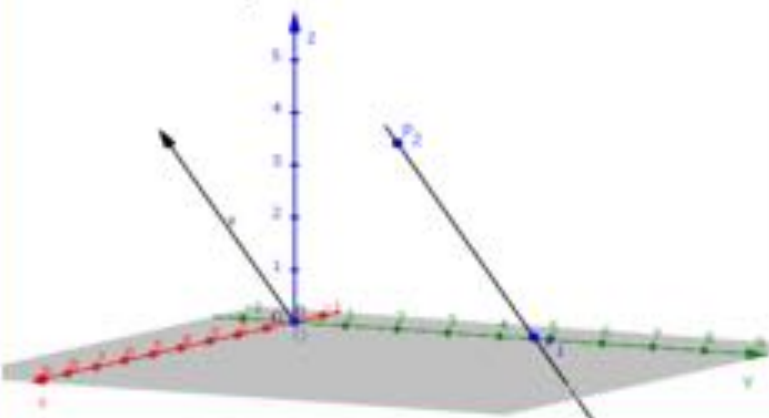


Video

Retta nel piano: equazione cartesiana

RETTE NEL PIANO	
Esempio	In generale
Retta r per $P_1(1; 3)$ e $P_2(6; 7)$	Retta r per $P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_2; y_2)$
Equazione cartesiana	
$\frac{x-1}{5} = \frac{y-3}{4} \Leftrightarrow 4(x-1) = 5(y-3)$ Il vettore $v(5, 4)$ dà la direzione della retta che ha equazione cartesiana $4x - 5y + 11 = 0.$ 	$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} \Leftrightarrow m(x-x_1) = l(y-y_1)$ Il vettore $v(l, m)$ dà la direzione della retta con equazione cartesiana $ax + by + c = 0$ dove trovo $a = m \text{ e } b = -l$

Retta nello spazio: equazioni cartesiane

RETTE NELLO SPAZIO	
Esempio	In generale
Retta r per $P_1(6; 8; 1)$ e $P_2(9; 7; 5)$	Retta r per $P_1(x_1; y_1; z_1)$ e $P_2(x_2; y_2; z_2)$
Equazioni cartesiane	
$\frac{x-6}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-1}{4} \Rightarrow \begin{cases} 4(x-6) = 3(z-1) \\ 4(y-8) = -1(z-1) \end{cases}$ Il vettore $\mathbf{v}(3, -1, 4)$ dà la direzione della retta r, che ha equazioni cartesiane: $\begin{cases} 4x - 3z - 21 = 0 \\ 4y + z - 33 = 0 \end{cases}$ 	$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \Rightarrow \begin{cases} n(x-x_1) = l(z-z_1) \\ n(y-y_1) = m(z-z_1) \end{cases}$ Il vettore $\mathbf{v}(l, m, n)$ dà la direzione della retta r, che ha equazioni cartesiane: $\begin{cases} ax + bz + d = 0 \\ a'y + b'z + d' = 0 \end{cases}$ dove trovo $\begin{aligned} a &= a' = n \\ b &= -l \\ b' &= -m \end{aligned}$

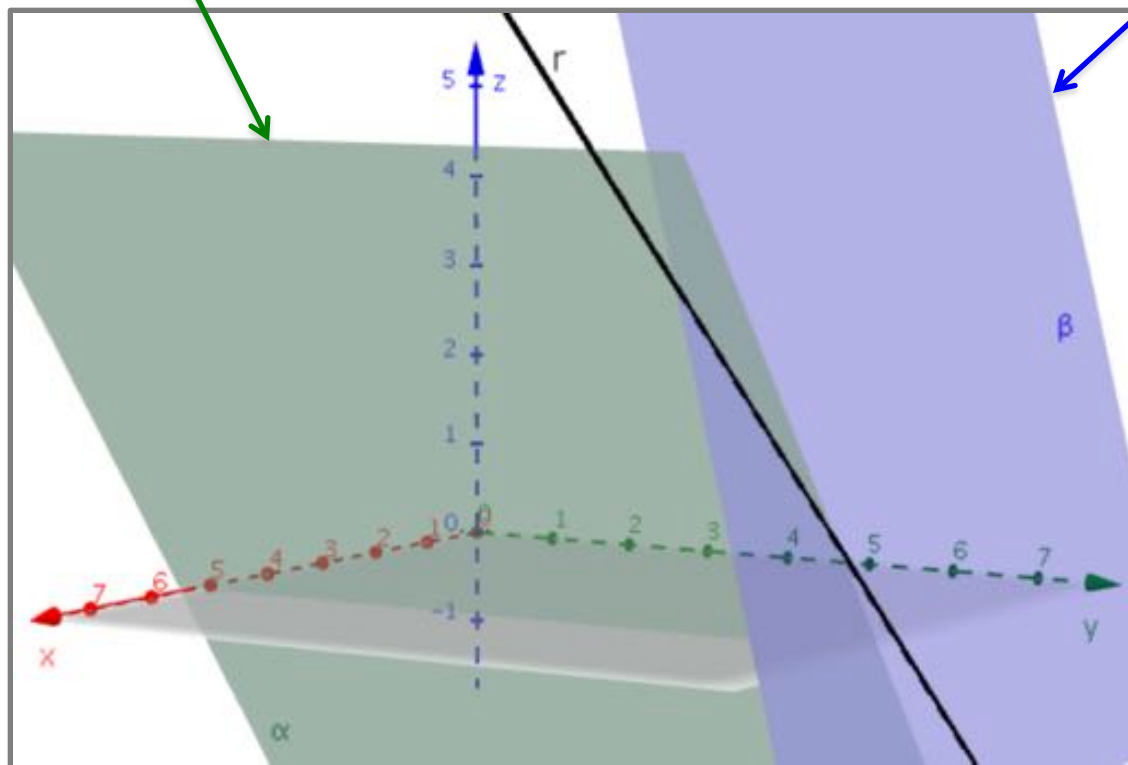
Retta nello spazio: equazioni cartesiane

Qual è il significato delle due equazioni cartesiane della retta? Ragioniamo sull'esempio.

Piano α

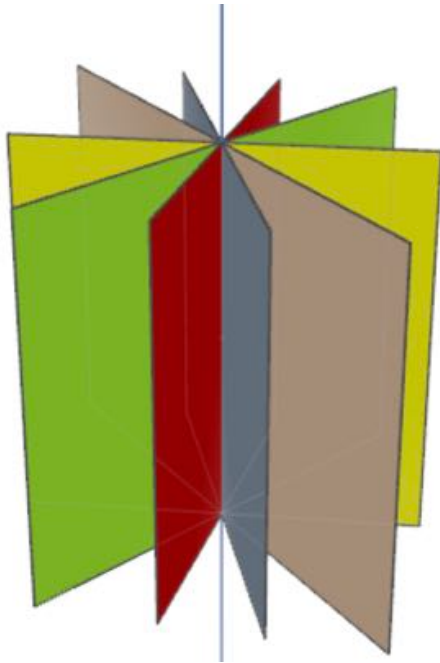
$$\begin{cases} 4x - 3z - 21 = 0 \\ 4y + z - 33 = 0 \end{cases}$$

Piano β

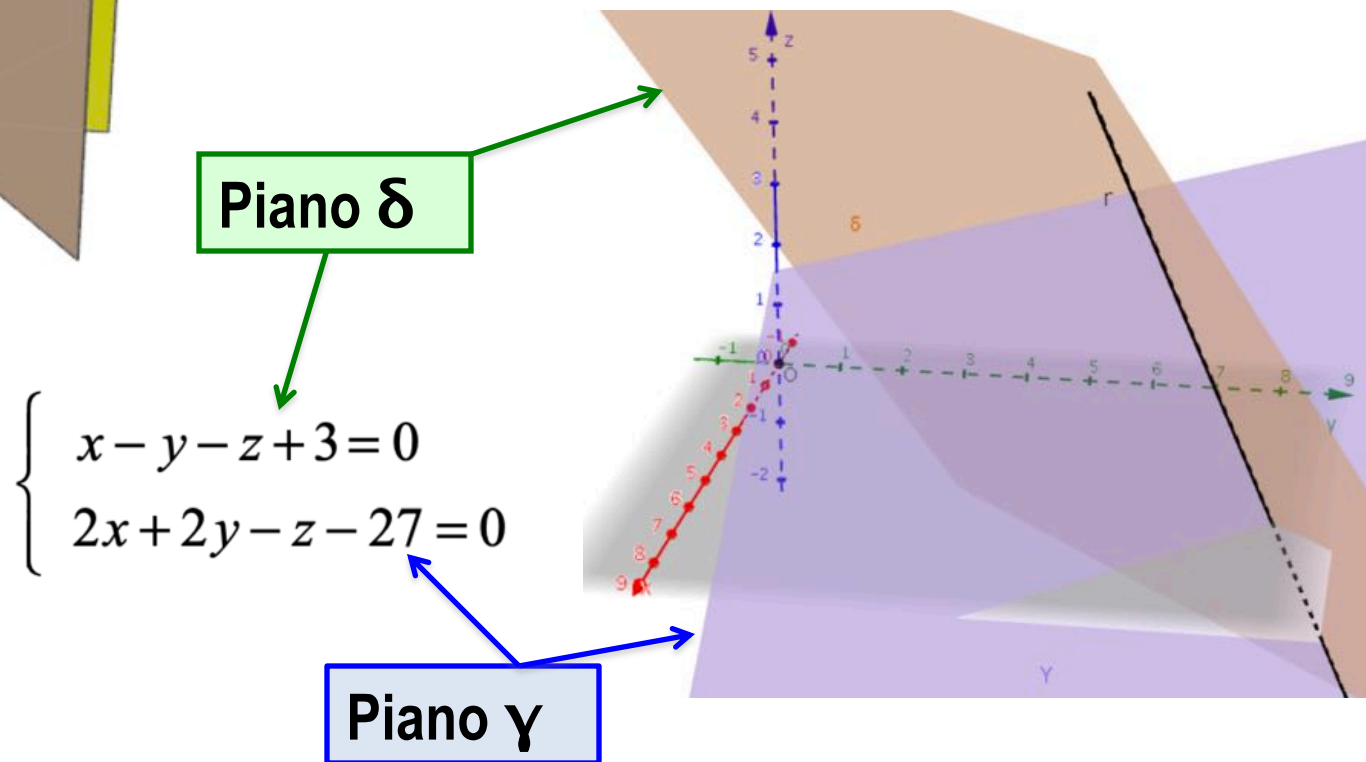


La retta è descritta come intersezione di due piani.

Retta come intersezione di due piani



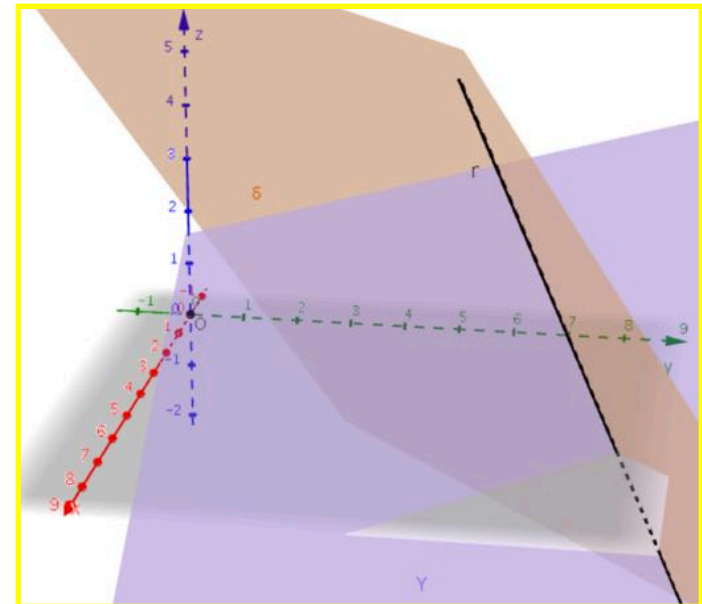
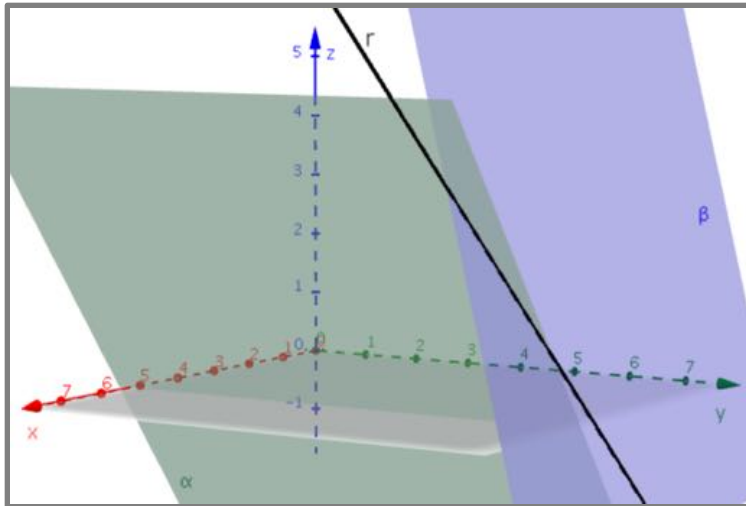
Ma α e β non sono gli unici due piani che passano per la retta r .
Posso rappresentare la stessa retta r con altre coppie di piani. Ecco un altro esempio.



Retta come intersezione di due piani

Tutti i sistemi rappresentano la stessa retta, perciò debbono essere equivalenti. Infatti trovo

$$\begin{cases} 4x - 3z - 21 = 0 & \text{(I)} \\ 4y + z - 33 = 0 & \text{(II)} \end{cases} \text{equivalente a} \begin{cases} 4x + 4y - 2z - 54 = 0 & \text{(I+II)} \\ 4x - 4y - 4z - 12 = 0 & \text{(I-II)} \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x + 2y - z - 27 = 0 \\ x - y - z + 3 = 0 \end{cases}$$



Posizione di rette nello spazio

RETTE PARALLELE

Due rette r ed r' sono parallele quando sono paralleli i vettori direzione

$$v(l, m, n) \text{ e } w(l', m', n')$$

e quindi trovo

$$\frac{l}{l'} = \frac{m}{m'} = \frac{n}{n'}$$

Posizione di rette nello spazio

RETTE PARALLELE UN ESEMPIO

r ha equazioni

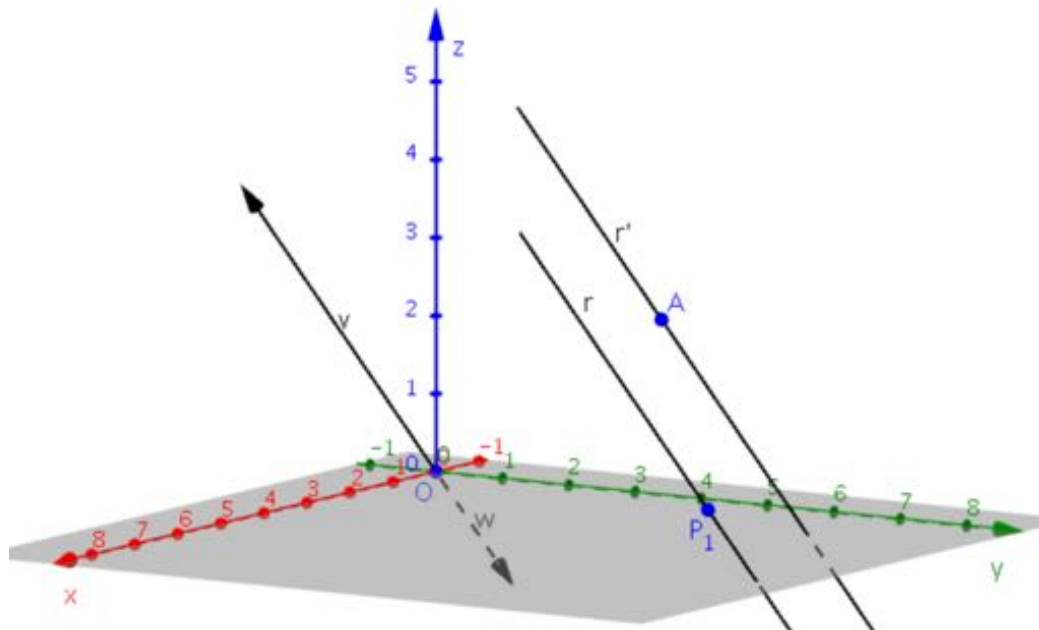
$$\frac{x-6}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-1}{4}$$

v (3, -1, 4)

r' ha equazioni

$$\frac{x-3}{-1,2} = \frac{y-5}{0,4} = \frac{z-4}{-1,6}$$

w (-1,2; 0, 4; -1,6)



$$\frac{3}{-1,2} = \frac{-1}{0,4} = \frac{4}{-1,6} = -2,5$$

Posizione di rette nello spazio

RETTE PERPENDICOLARI

Due rette r ed r' sono perpendicolari quando sono perpendicolari i vettori direzione

$v(l,m,n)$ e $w(l', m', n')$

e quindi trovo

$$l \cdot l' + m \cdot m' + n \cdot n' = 0$$

Posizione di rette nello spazio

RETTE PERPENDICOLARI UN ESEMPIO

r ha equazioni

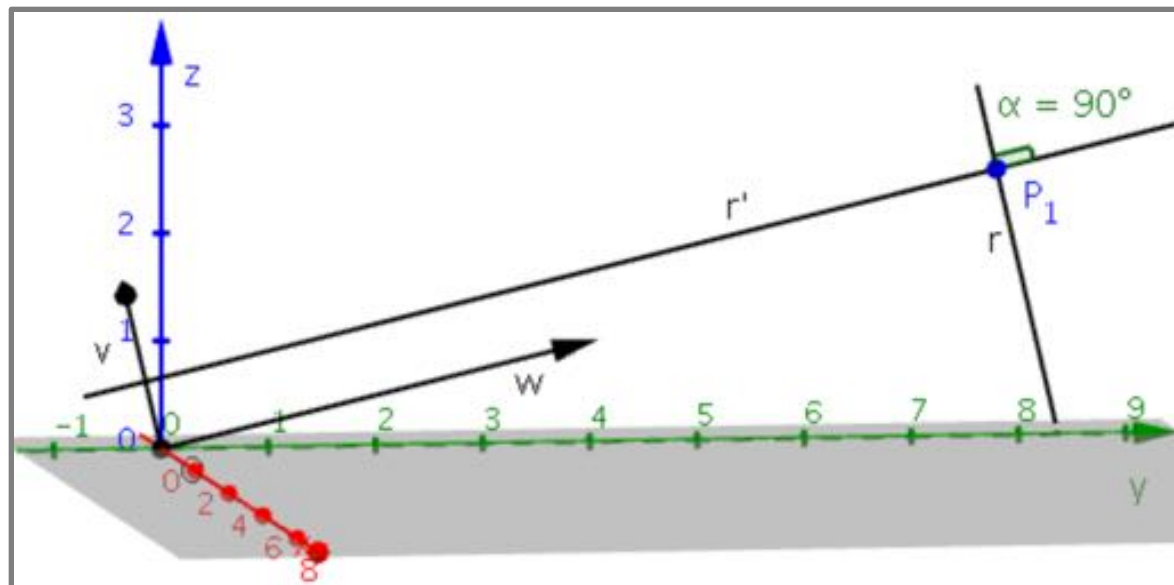
$$\frac{x-5}{4} = \frac{y-7}{-1} = \frac{z-3}{2}$$

$v(4, -1, 2)$

r' ha equazioni

$$\frac{x-5}{0,5} = \frac{y-7}{4} = \frac{z-3}{1}$$

$w(0,5; 4; 1)$



$$0,5 \cdot 4 + 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 0$$

Posizione di retta e piano

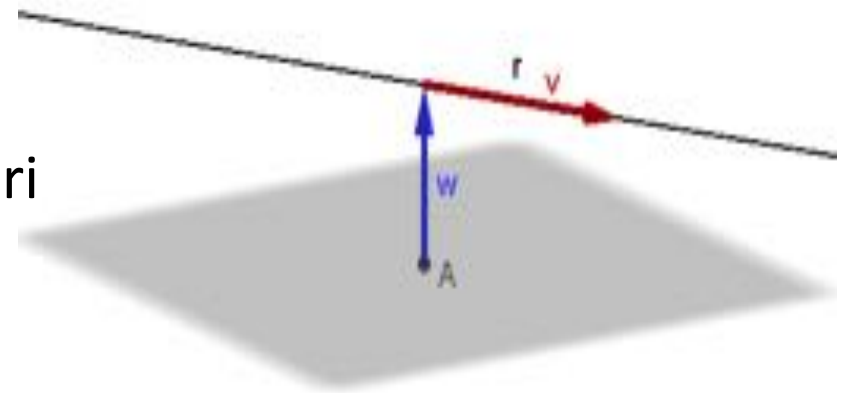
RETTE E PIANO PARALLELI

Una retta r e un piano α sono **paralleli** quando sono **perpendicolari i vettori**

- $\mathbf{v}(l,m,n)$ (direzione della retta);
- $\mathbf{w}(a,b,c)$ normale al piano α .

Perciò il prodotto scalare dei 2 vettori deve essere nullo e troviamo:

$$l \cdot a + m \cdot b + n \cdot c = 0$$



Posizione di retta e piano

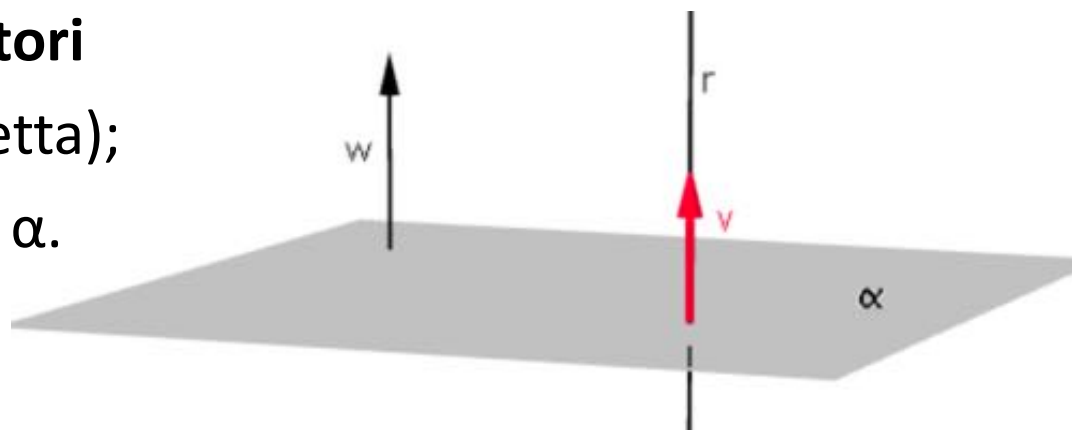
RETTE E PIANO PERPENDICOLARI

Una retta r e un piano α sono **perpendicolari** quando sono **paralleli i vettori**

- $v(l,m,n)$ (direzione della retta);
- $w(a,b,c)$ normale al piano α .

E perciò risulta:

$$\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}$$



Attività

**Completa la scheda di lavoro che ti guiderà
nell'applicazione dei concetti fin qui appresi**

Attività

Che cosa hai trovato

Problema 1

1. Sono dati il punto $A(2; -2; -1)$ e il vettore $v(3; 4; 1)$.
Determinare le equazioni parametriche e le equazioni cartesiane della retta r , che passa per A e ha direzione v .

Equazioni parametriche

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{1} = t \text{ da cui } \begin{cases} x-2 = 3t \\ y+2 = 4t \\ z+1 = t \end{cases}$$

Ricavo quindi le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -2 + 4t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

Per le equazioni cartesiane

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{1} \text{ da cui ricavo il sistema } \begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4} \\ \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{1} \end{cases}$$

$$\text{Perciò equazioni cartesiane possono essere } \begin{cases} 4x - 3y - 14 = 0 \\ y - 4z - 2 = 0 \end{cases}$$

Problema 2

Quesiti a, b, c

2. Sono date nella tabella le equazioni di due rette e due piani. Scrivi il vettore direzione di ogni retta e il vettore normale di ogni piano per completare la tabella e rispondere ai quesiti seguenti.

Piano o retta	$\alpha: 3x + 2y + 7z - 28 = 0$	$\beta: 2x + 4y - 2z + 5 = 0$	$r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 4 - t \end{cases}$	$s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 19 + 2t \\ z = 8 - t \end{cases}$
Vettori	$w = (3, 2, 7)$	$w' = (2, 4, -2)$	$v = (3, -1, -1)$	$v' = (1, 2, -1)$

a. La retta r è parallela al piano α ? ☒ Si ☐ No

Perché $3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 7 \cdot (-1) = 9 - 7 - 7 = -5 \neq 0$, perciò v perpendicolare a w e r parallela ad α .

b. La retta s è parallela al piano α ? ☒ Si ☐ No

Perché $1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) = 3 + 4 - 7 = 0$, perciò v' perpendicolare a w e s parallela ad α .

c. La retta s è parallela alla retta r ? ☒ Si ☐ No

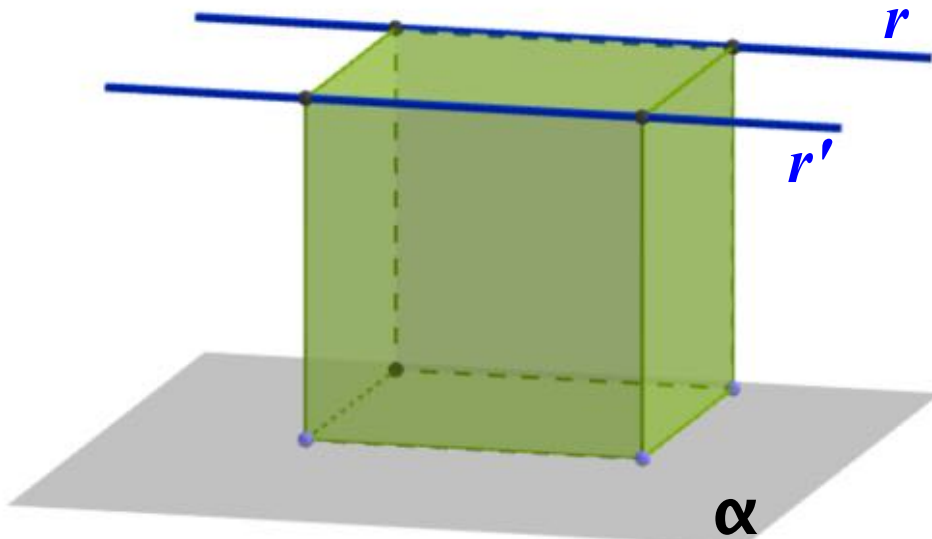
Perché $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{-1} \neq \frac{-1}{-1}$, perciò v non è parallelo a v' .

Pensi che le due rette r ed s , parallele allo stesso piano, debbono essere parallele fra loro?

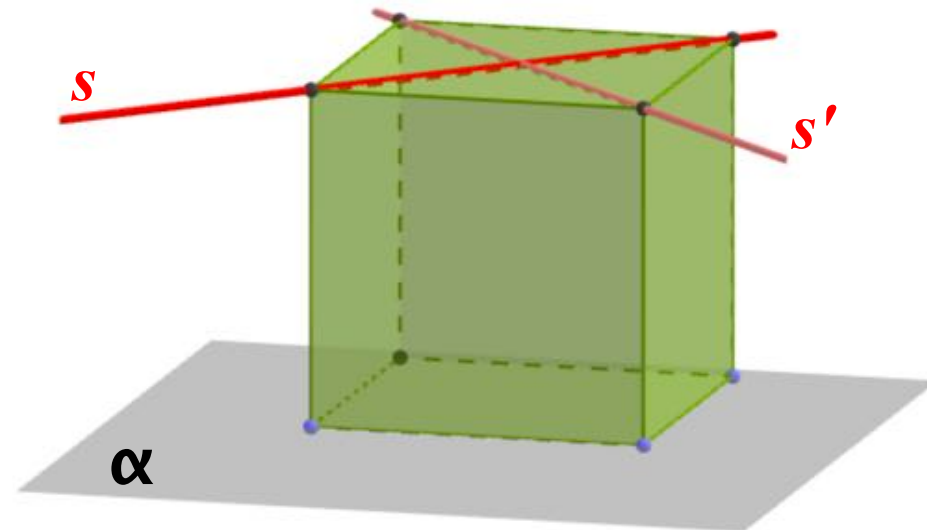
Problema 2

Quesito c

Nello spazio, due rette parallele ad uno stesso piano non sono necessariamente parallele fra loro.



r, r' parallele ad α
e parallele fra loro

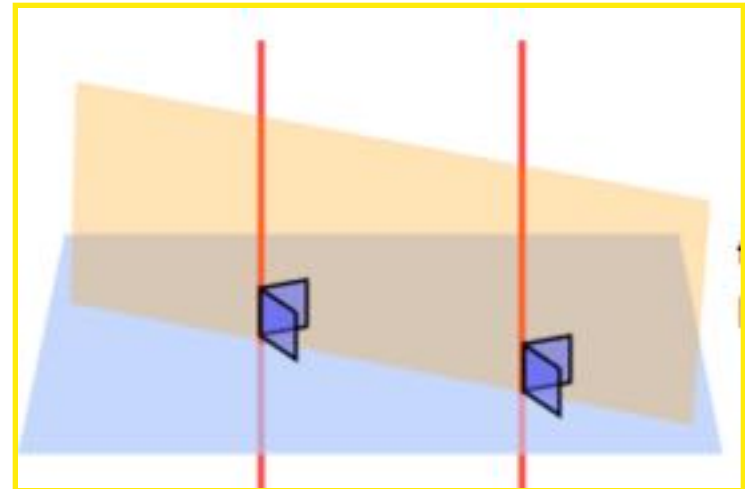


s, s' parallele ad α e
NON parallele fra loro

Problema 2

UNA RIFLESSIONE

INVECE, nello spazio, **sono sempre parallele** fra loro due rette perpendicolari ad uno stesso piano.



Problema 2

Quesiti d, e

2. Sono date nella tabella le equazioni di due rette e due piani. Scrivi il vettore direzione di ogni retta e il vettore normale di ogni piano per completare la tabella e rispondere ai quesiti seguenti.

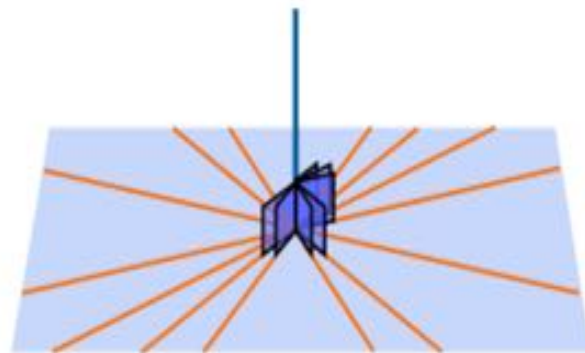
Piano o retta	$\alpha: 3x + 2y + 7z - 28 = 0$	$\beta: 2x + 4y - 2z + 5 = 0$	$r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 4 - t \end{cases}$	$s: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 19 + 2t \\ z = 8 - t \end{cases}$
Vettori	$w = (3, 2, 7)$	$w' = (2, 4, -2)$	$v = (3, -1, -1)$	$v' = (1, 2, -1)$

- d. La retta s è perpendicolare al piano β ? ☒ Si ☐ No

Perché $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-1}{-2}$, perciò v' è parallelo a w' e s perpendicolare a β .

- e. Modifica solo v' per scrivere le equazioni parametriche di una retta s' che è perpendicolare a r .
 Varie risposte possibili perché tutte le rette perpendicolari ad r per il punto $P(5, 19, 8)$ riempiono il piano perpendicolare ad r per P . Ad esempio, può essere $v'(1, 2, 1)$, così trovo:

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 3 - 2 - 1 = 0 \text{ e l'equazione è } s': \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 19 + 2t \\ z = 8 + t \end{cases}$$



Problema 3

Quesito a

3. In un riferimento cartesiano $Oxyz$ è data la sfera di centro O e raggio 5. Completa la soluzione dei seguenti quesiti:

a. Determina l'equazione della superficie sferica.

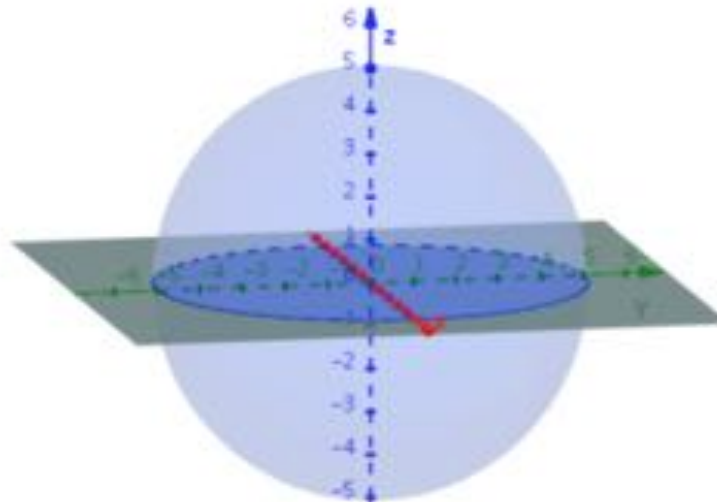
La superficie sferica ha equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

perché è il luogo definito dall'equazione

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = r^2$$

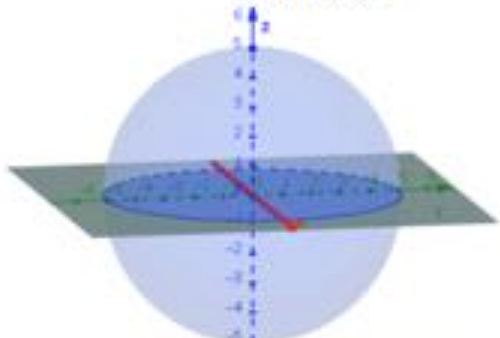
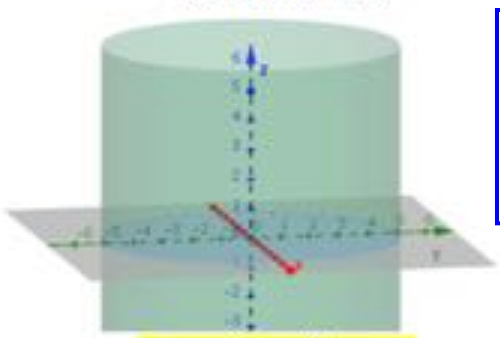
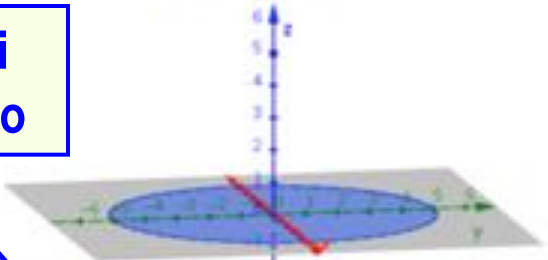
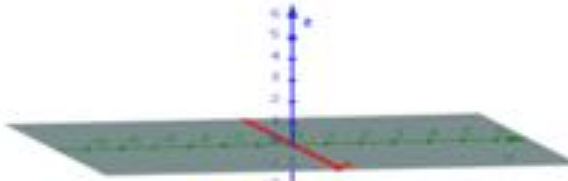
dove $C(x_C, y_C, z_C)$ è il centro e r il raggio.



Problema 3

Quesito b

b. Qui sotto sono date cinque equazioni e quattro grafici nel riferimento $Oxyz$.
Associa ad ogni equazione il suo grafico.

A. Sfera  A: $x^2 + y^2 + z^2 = 25$	B. Cilindro  B: $x^2 + y^2 = 25$
C. Circonferenza  C: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ z = 0 \end{cases}$ C: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ z = 0 \end{cases}$	D. Piano  D: $z = 0$

Intersezione di
sfera con piano

z non compare,
perciò è libera
di variare

Intersezione di
cilindro con piano

Problema 4

4. È data la superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ e la retta s rappresentata dal seguente sistema parametrico:
$$\begin{cases} x = -4t + 4 \\ y = -7t + 3 \\ z = 3t \end{cases} \text{ con } t \in \mathbf{R}.$$

Completa la risoluzione dei seguenti quesiti.

- a. Determina i punti A e B di intersezione fra la superficie sferica e la retta.

Risolvero con il metodo di sostituzione il sistema formato dalle equazioni della superficie sferica e della retta:

$$\begin{cases} x = -4t + 4 \\ y = -7t + 3 \\ z = 3t \\ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x = -4t + 4 \\ y = -7t + 3 \\ z = 3t \\ (-4t + 4)^2 + (-7t + 3)^2 + (3t)^2 = 25 \Rightarrow t^2 - t = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 3 \\ z_1 = 0 \\ t_1 = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = -4 \\ z_2 = 3 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

I punti di intersezione sono dunque: $A(4, 3, 0)$ e $B(0, -4, 3)$

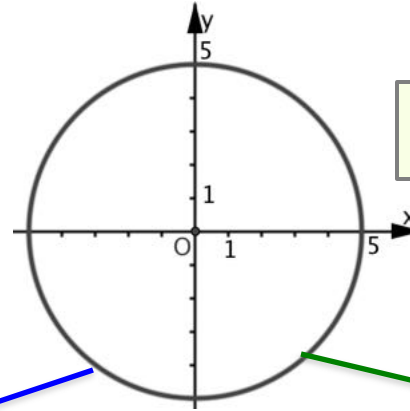
- b. Calcola la lunghezza del segmento AB

La distanza fra i due punti è data da

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-0)^2 + (3+4)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{74} \approx 8,6$$

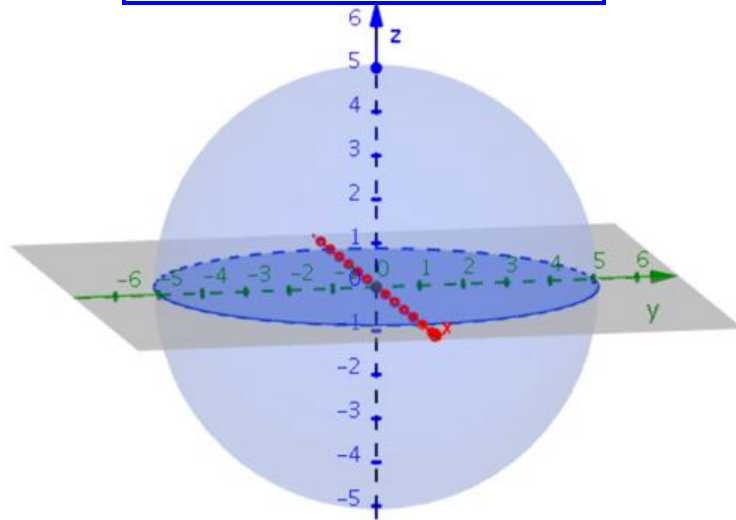
Equazioni dal piano allo spazio

CIRCONFERENZA



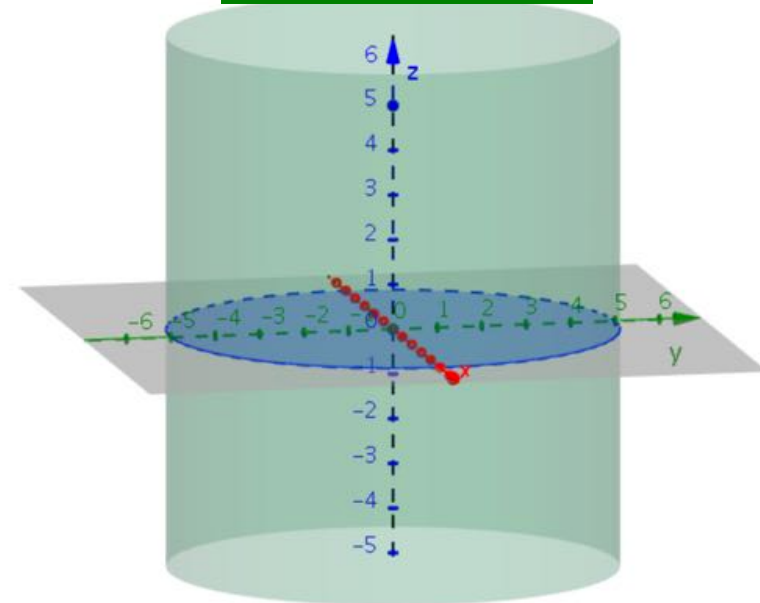
$$x^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$



SFERA

$$x^2 + y^2 = 25$$



CILINDRO