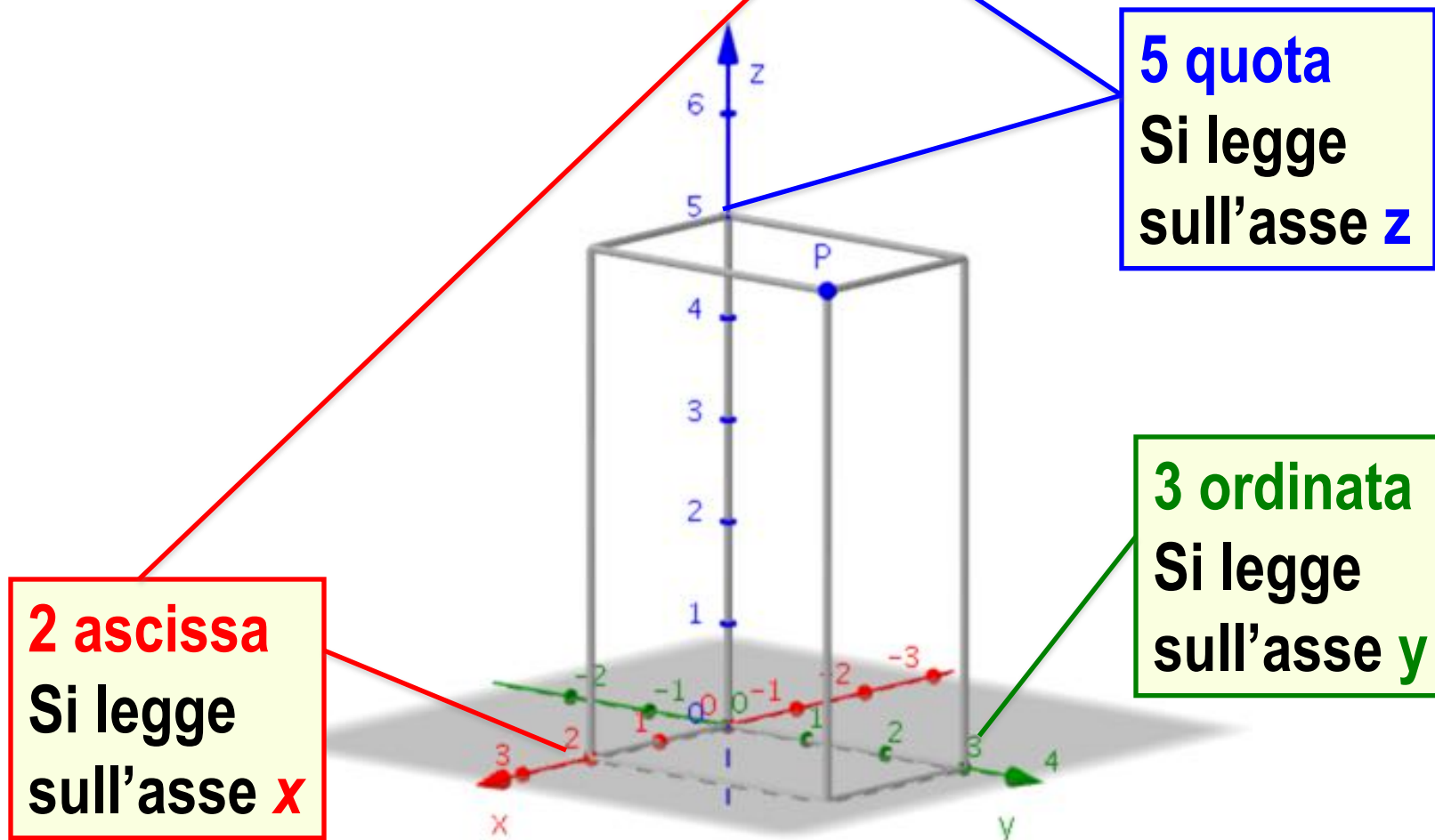


Coordinate cartesiane nello spazio

**Equazioni di piani e sfere
nello spazio**

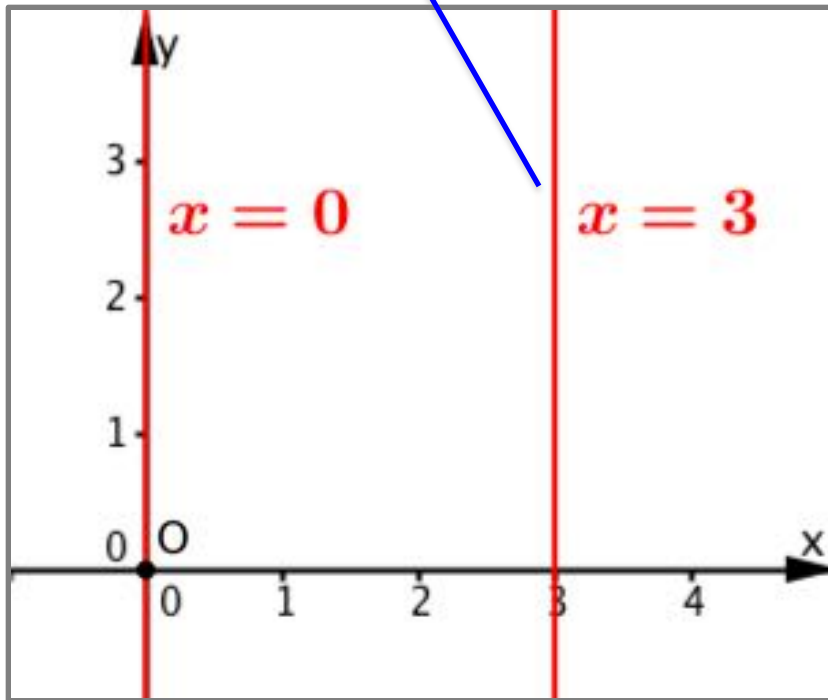
Aggiungo una dimensione...

Punto P(**2**, **3**, **5**)

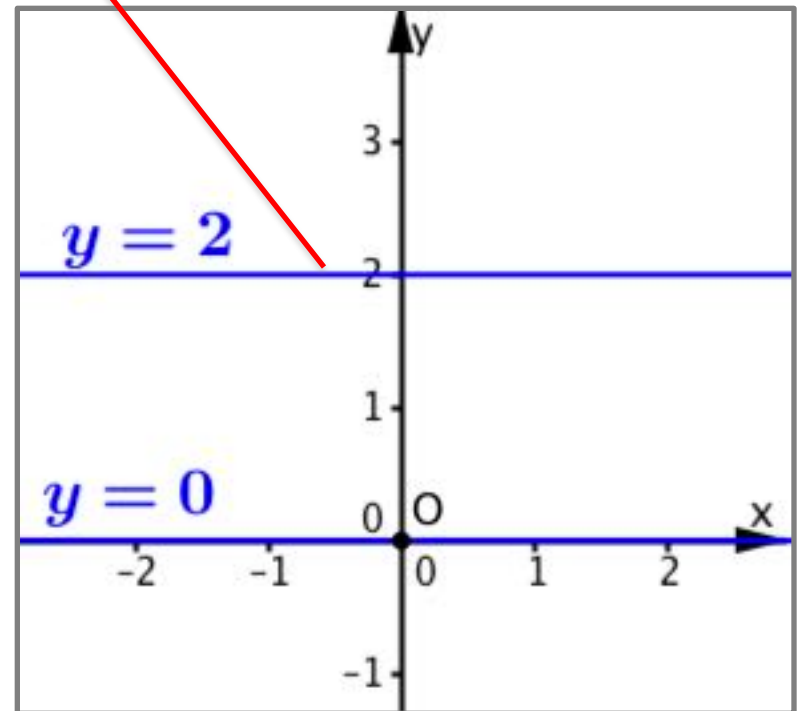


Nel piano **rette particolari**

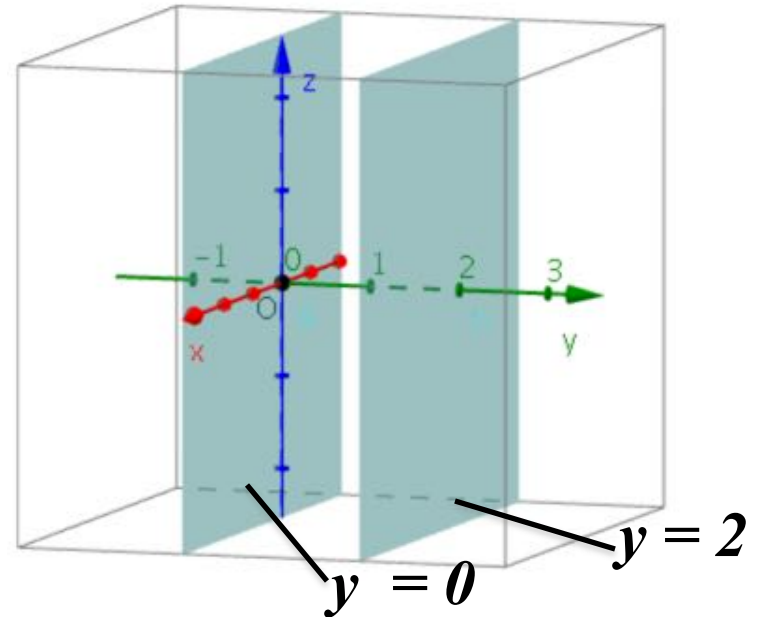
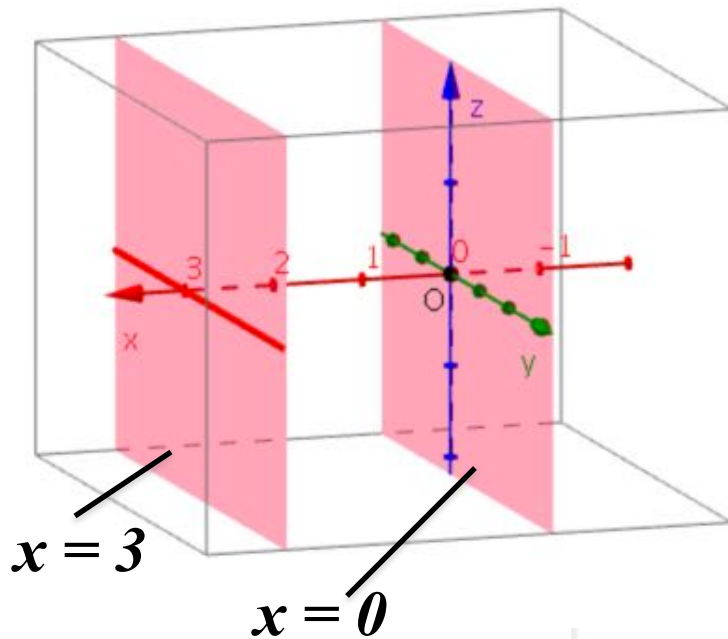
y non compare, perciò
è libera di variare



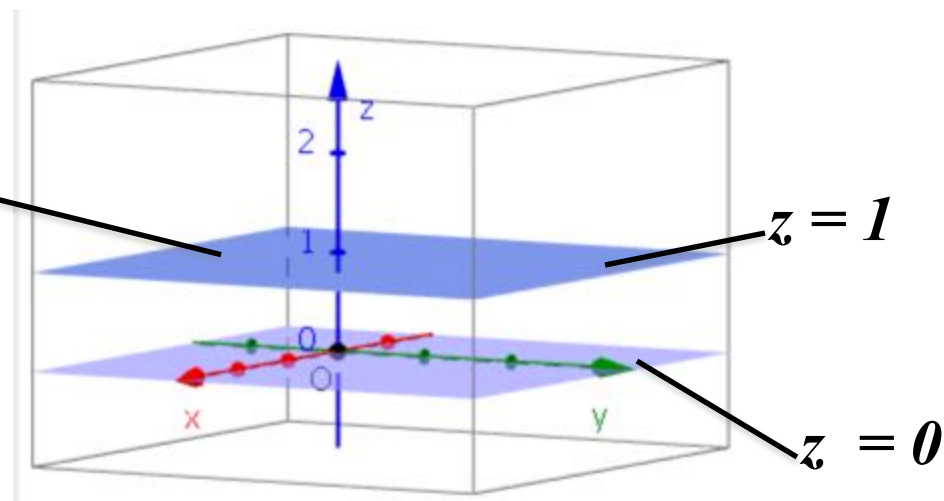
x non compare, perciò
è libera di variare



Nello spazio: piani particolari



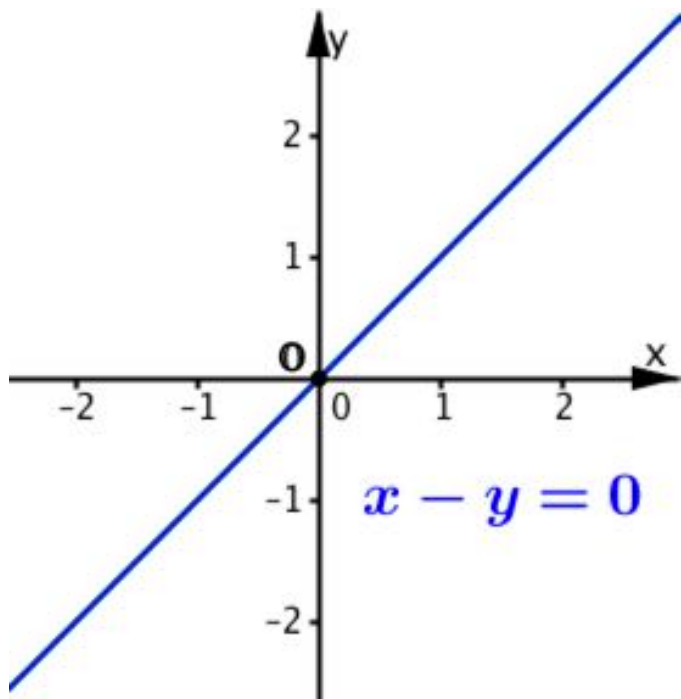
x e **y** non compaiono, perciò
sono libere di variare



Riferimento cartesiano nel piano e nello spazio

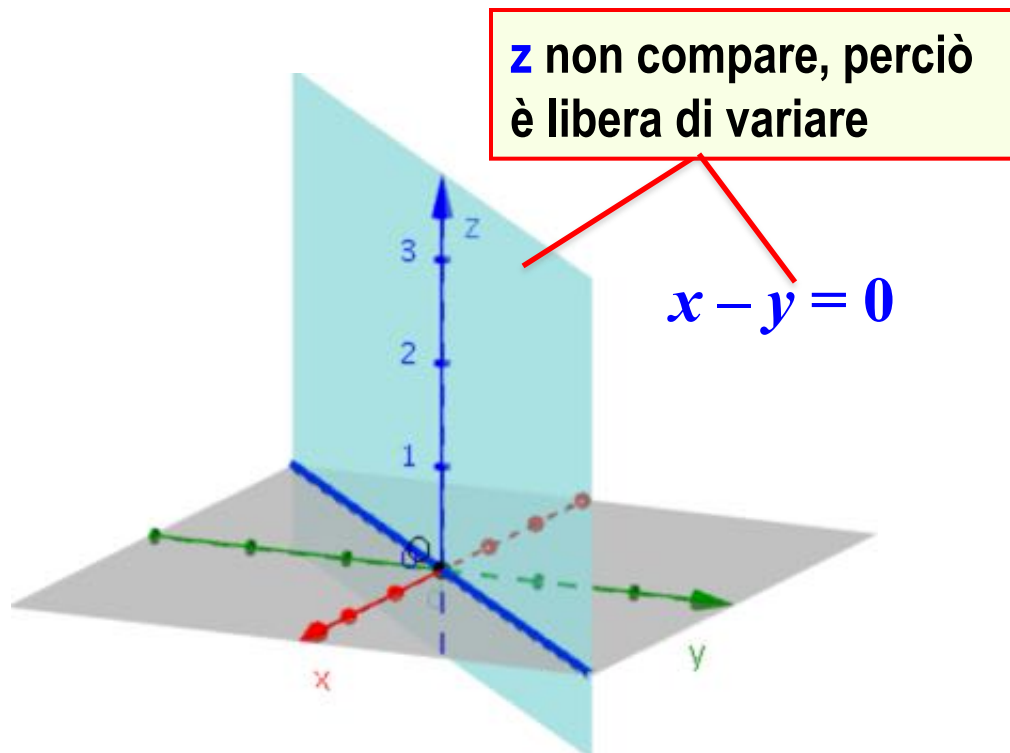
Equazione $x - y = 0$ **nel piano**

Rappresenta una retta particolare:
la bisettrice del I e III quadrante



Equazione $x - y = 0$ **nello spazio**

Rappresenta un piano particolare:
il piano bisettore del I e III 'ottante'



Aggiungo una dimensione ...

Equazione di **retta nel piano**

Forma implicita

$$ax + by + c = 0$$

Forma esplicita

$$y = mx + q$$

Equazione di **piano nello spazio**

Forma implicita

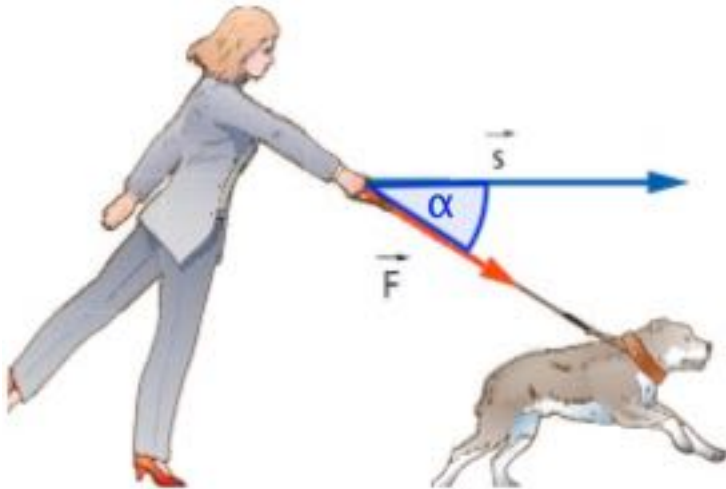
$$ax + by + cz + d = 0$$

Forma esplicita

$$z = mx + ny + q$$

Vettori e prodotto scalare in fisica e in matematica

Vettori e prodotto scalare in fisica



Vettori: spostamento **s** e forza **F**

Lavoro **W** della forza **F**

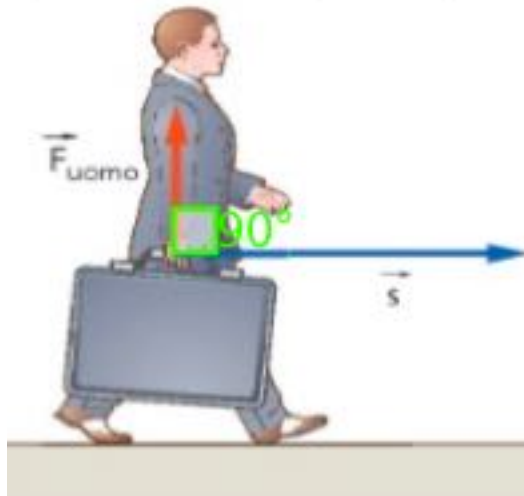
$$W = F \cdot s \cdot \cos\alpha$$

$$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$

Prodotto
scalare

Intensità
della forza

Lunghezza dello
spostamento



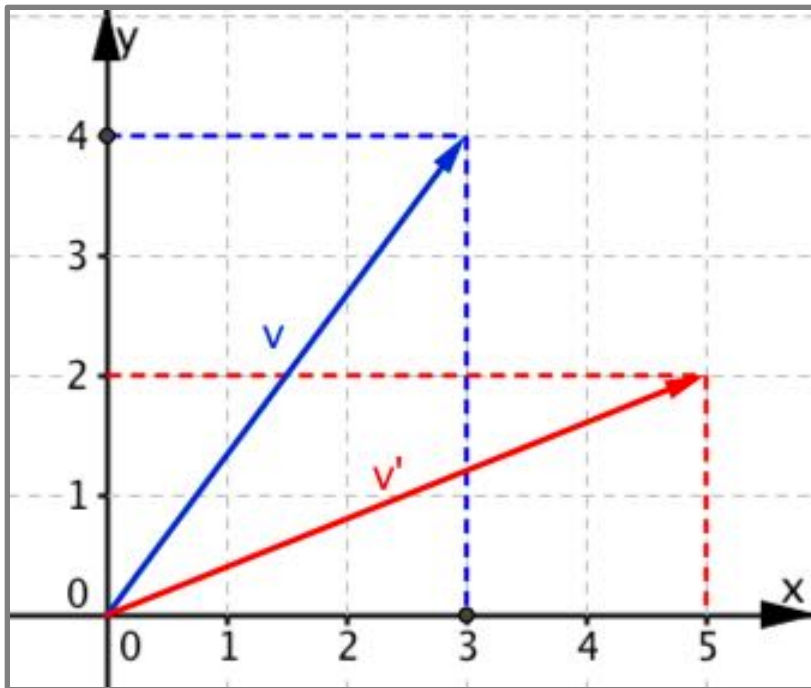
Se i vettori sono perpendicolari

$$\alpha = 90^\circ \rightarrow \cos 90^\circ = 0$$

$$W = 0$$

Vettori in un riferimento cartesiano

Nel piano



Esempio

Vettori $v(3, 4)$ e $v'(5, 2)$

Prodotto scalare

$$v \cdot v' = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 2$$

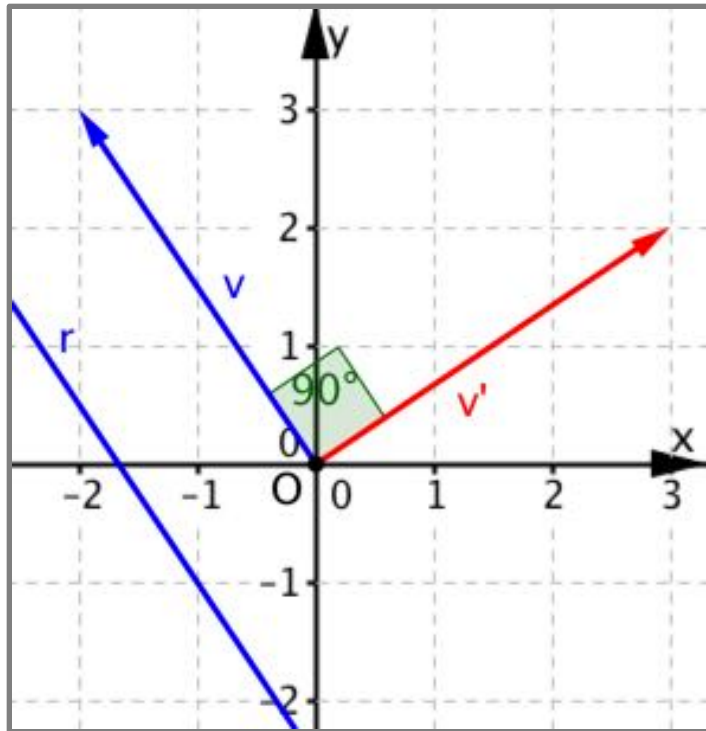
In generale

Vettori $v(a, b)$ e $v'(a', b')$

Prodotto scalare

$$v \cdot v' = aa' + bb'$$

Rette e vettori nel piano cartesiano



Esempio

La retta r ha equazione

$$3x + 2y + 5 = 0$$

Il vettore $v(-2, 3)$ è parallelo alla retta r , perciò dà la *direzione* di r .

Il vettore $v'(3, 2)$ è perpendicolare a v , perché risulta $v \cdot v' = 0$.

Perciò v' è perpendicolare a r .

In generale

La retta r ha equazione $ax + by + c = 0$

$v(-b, a)$ dà la direzione di r .

$v'(a, b)$ è perpendicolare a r .

Piani e vettori nello spazio

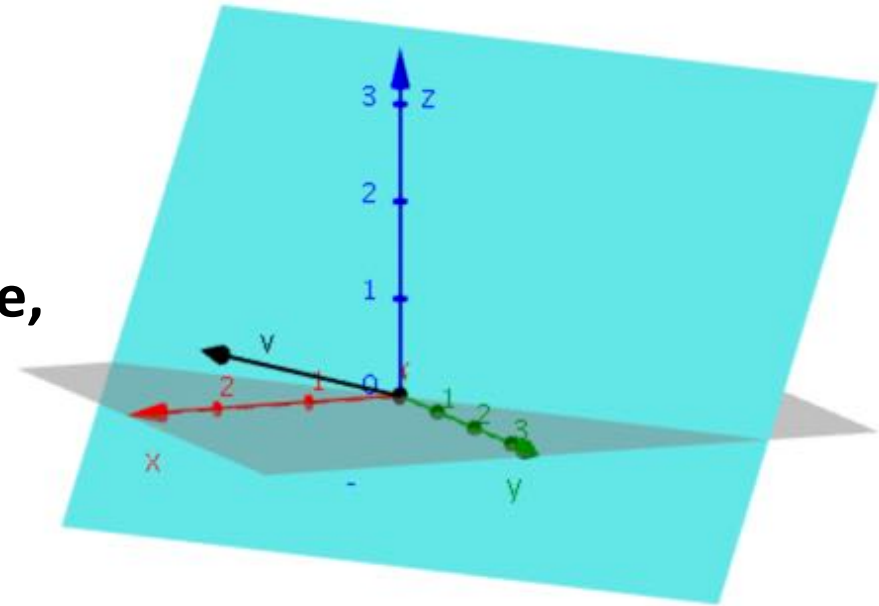
ESEMPIO

Il piano α ha equazione

$$3x + 2y + z + 5 = 0$$

Per analogia

Il vettore v ($3, 2, 1$) è perpendicolare,
ossia *normale* al piano α .



IN GENERALE

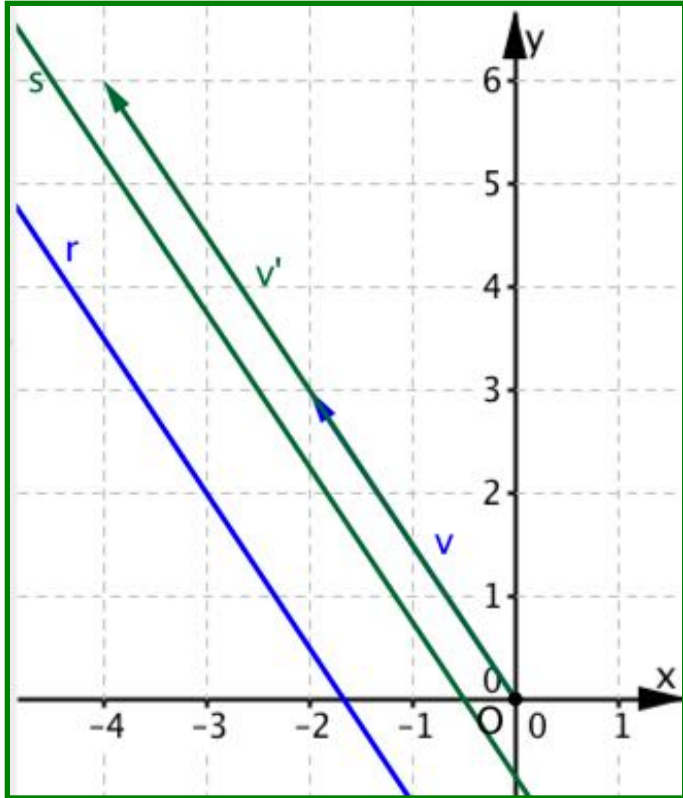
Il piano α ha equazione

$$ax + by + cz + d = 0$$

Per analogia

Il vettore v (a, b, c)
è *normale* al piano α .

Rette parallele e vettori nel piano cartesiano



Esempio: due rette parallele

Retta r

- Equazione $3x + 2y + 5 = 0$
- Vettore $v(-2, 3)$

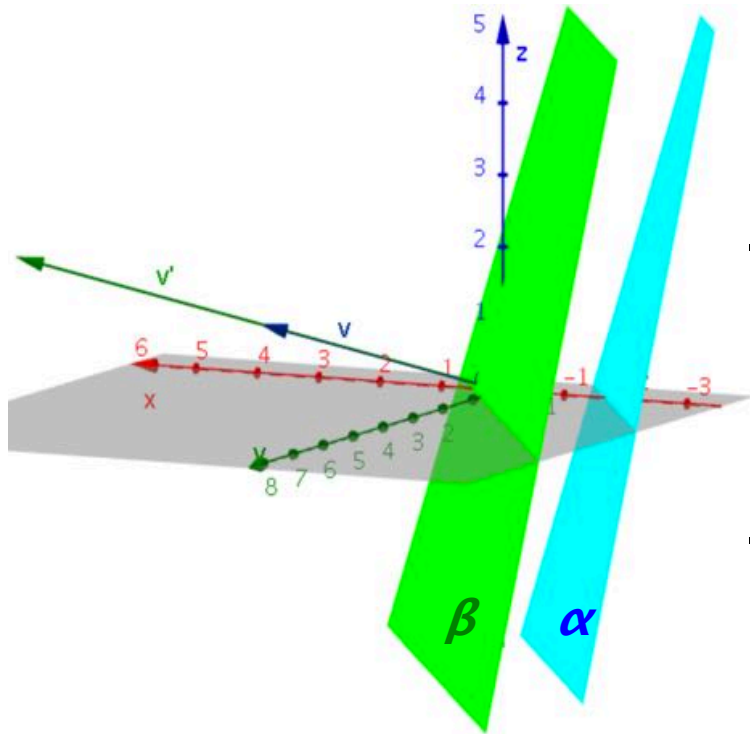
Retta s

- Equazione $6x + 4y + 3 = 0$
- Vettore $v'(-4, 6)$

In generale: due rette parallele
r ha equazione $ax + by + c = 0$
s ha equazione $a'x + b'y + c = 0$
 $a'/a = b'/b$

v e v' hanno la stessa
direzione, perciò trovo
 $-4/-2 = 6/3$
E anche
 $6/3 = 4/2$

Piani paralleli e vettori nello spazio



Esempio: due piani paralleli

Piano α

- Equazione $3x + 2y + z + 5 = 0$
- Vettore normale $v(3, 2, 1)$

Piano β

- Equazione $6x + 4y + 2z + 3 = 0$
- Vettore normale $v'(6, 4, 2)$

In generale: due piani paralleli

α ha equazione $ax + by + cz + d = 0$

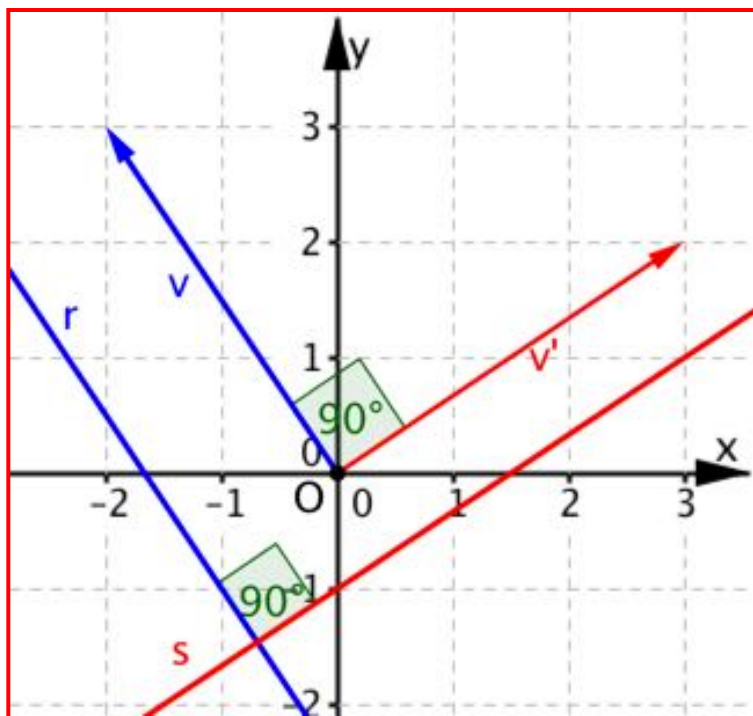
β ha equazione $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

$$a'/a = b'/b = c'/c$$

v e v' hanno la stessa direzione, perciò trovo

$$6/3 = 4/2 = 2/1$$

Rette perpendicolari e vettori nel piano cartesiano



Esempio: due rette perpendicolari

Retta r

- Equazione $3x + 2y + 5 = 0$
- Vettore $v(-2, 3)$

Retta s

- Equazione $-2x + 3y + 3 = 0$
- Vettore $v'(3, 2)$

In generale: due rette perpendicolari

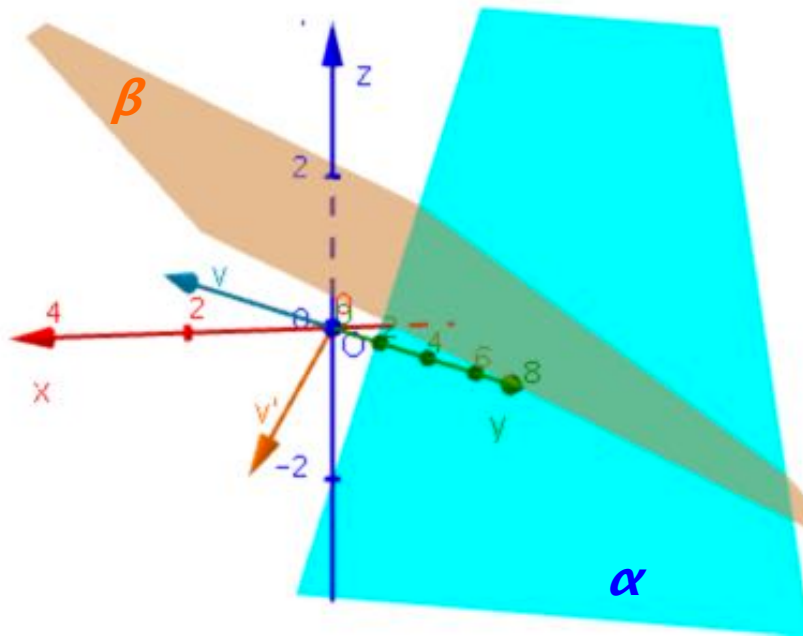
r ha equazione $ax + by + c = 0$

s ha equazione $a'x + b'y + c = 0$

$$aa' + bb' = 0$$

$$v \cdot v' = 0, \text{ perciò trovo} \\ -2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 6 - 6 = 0$$

Piani perpendicolari e vettori nello spazio



Esempio: due piani perpendicolari

Piano α

- Equazione $3x + 2y + z + 5 = 0$

- Vettore normale $v(3, 2, 1)$

Piano β

- Equazione $x - 0,5y - 2z + 4 = 0$

- Vettore normale $v'(1; -0,5; -2)$

In generale: due piani perpendicolari

α ha equazione $ax + by + cz + d = 0$

β ha equazione $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

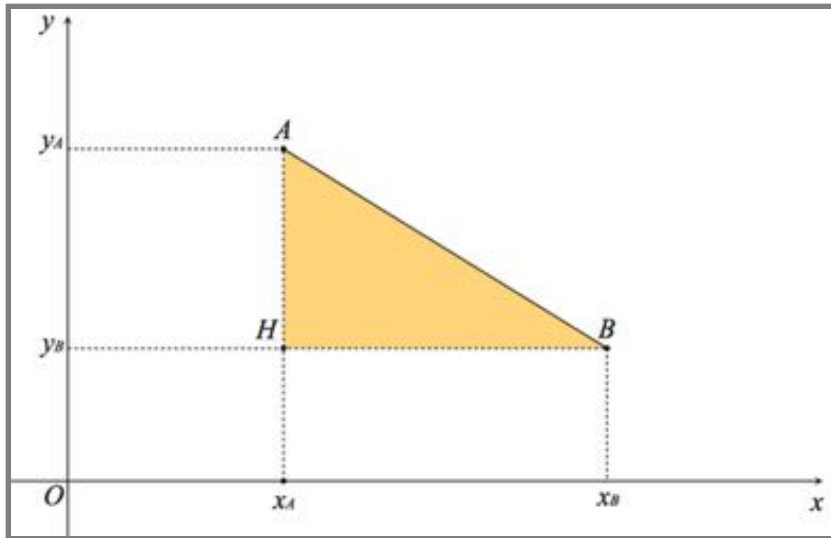
$$aa' + bb' + cc' = 0$$

$$\begin{aligned} v \cdot v' &= 0, \text{ perciò trovo} \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-0,5) + 1 \cdot (-2) &= \\ &= 3 - 1 - 2 = 0 \end{aligned}$$

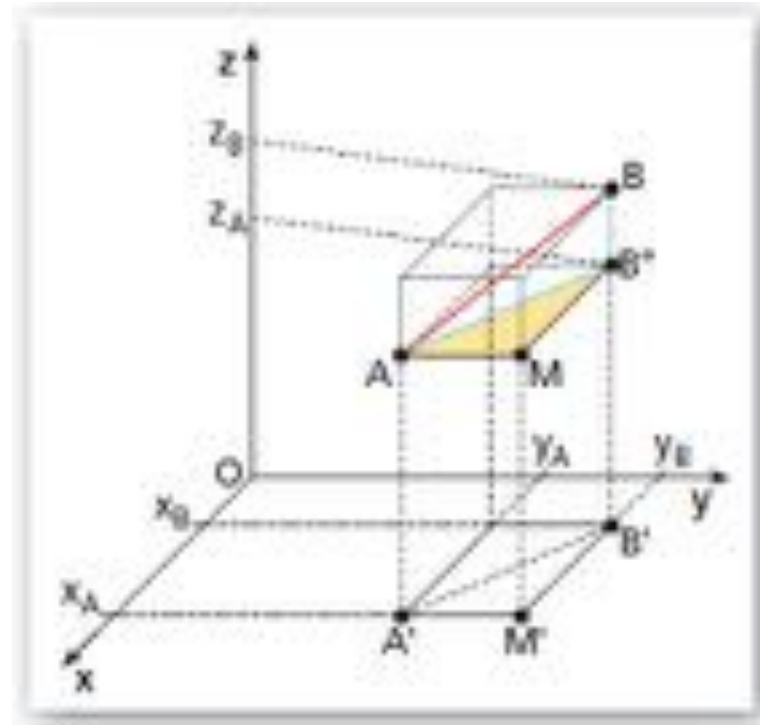
Distanza di due punti

Nello spazio

Nel piano



$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

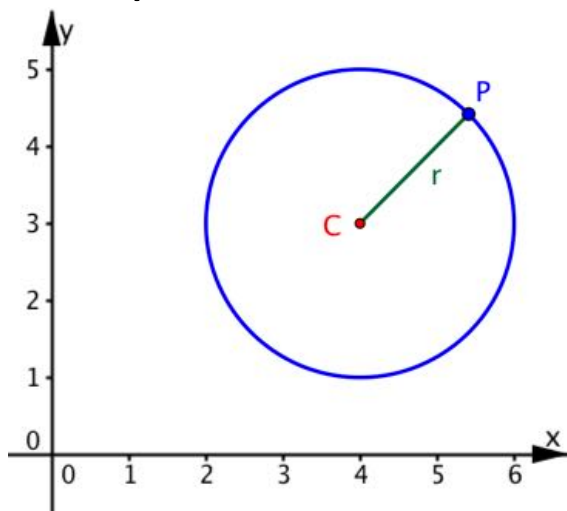


$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

Equazione di circonferenza e sfera

Nel piano

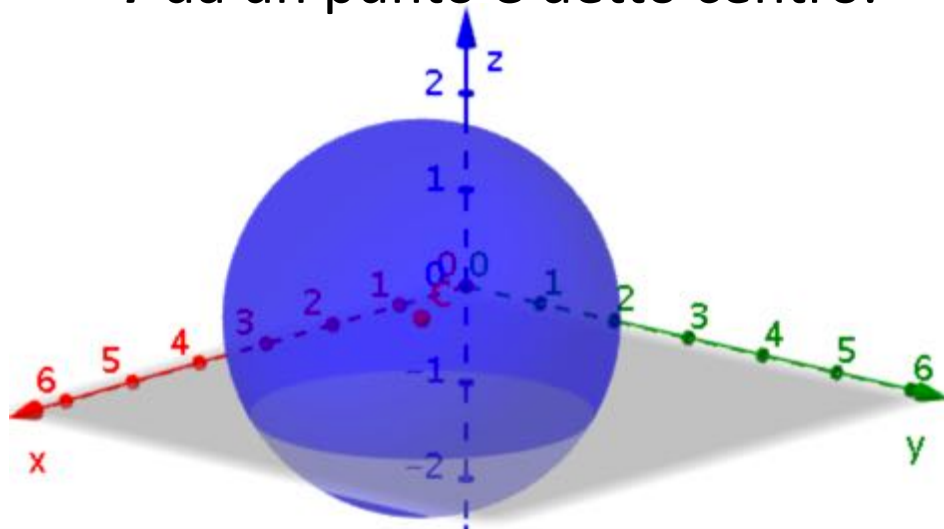
La circonferenza è il luogo dei punti $P(x, y)$ che hanno distanza r da un punto C detto centro.



$C(x_C, y_C)$ raggio r

Nello spazio

La sfera è il luogo dei punti $P(x, y, z)$ che hanno distanza r da un punto C detto centro.



$C(x_C, y_C, z_C)$ raggio r

Attività

**Lavora ora con la scheda che ti guiderà
nell'applicazione dei concetti fin qui appresi**

Attività

Che cosa hai trovato

Problema 1

Piano	Coefficienti	Vettore normale
$\alpha: x - 3y + 2z - 1 = 0$	$a = 1, b = -3, c = 2, d = -1$	$v(1, -3, 2)$
$\alpha_1: 3x - y + 2z = 0$	$a_1 = 3, b_1 = 0, c_1 = 2, d_1 = 0$	$v(3, 0, 2)$
$\alpha_2: 2x - 6y + 4z - 5 = 0$	$a_2 = 2, b_2 = -6, c_2 = 4, d_2 = -5$	$v(2, -6, 4)$
$\alpha_3: 3x - y - 3z = 0$	$a_3 = 3, b_3 = -1, c_3 = -3, d_3 = 0$	$v(3, -1, -3)$

a. Quali piani sono paralleli? α e α_2

Perché $\frac{2}{1} = \frac{-6}{-3} = \frac{4}{2} = 2$ ossia $\frac{a_2}{a} = \frac{b_2}{b} = \frac{c_2}{c}$

b. Quali piani sono perpendicolari? α e α_3 , α_2 e α_3

Perché $1 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) = 3 + 3 - 6 = 0$ ossia $a \cdot a_3 + b \cdot b_3 + c \cdot c_3 = 0$
e α_2 parallelo ad α_3

c. Quali piani non sono né perpendicolari né paralleli? α_1 e α_3

Perché $3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) = 4 \neq 0$ e $\frac{3}{3} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{2}{-3}$

Problema 2

2. Completa il procedimento per risolvere il seguente problema.

Scrivi l'equazione del piano β che passa per $P(-3, 2, 4)$ ed è parallelo al piano α d'equazione $3x - 2y - z + 6 = 0$

Nell'equazione di α trovo i coefficienti $a = 3$, $b = -2$, $c = -1$

Nell'equazione di β debbo trovare a' , b' , c' in modo che

$$\frac{a'}{3} = \frac{b'}{-2} = \frac{c'}{-1} = k \neq 0 \quad \text{da cui} \quad a' = 3k, \quad b' = -2k, \quad c' = -k$$

L'equazione di β sarà del tipo: $3kx - 2ky - kz + d' = 0$

Divido i due membri per $k \neq 0$ e ottengo $3x - 2y - z + \frac{d'}{k} = 0$

Ma il piano deve passare per P e quindi deve essere

$$3(-3) - 2 \cdot 2 - 4 + \frac{d'}{k} = 0, \quad \text{da cui ricavo} \quad \frac{d'}{k} = 17$$

Il piano β ha quindi equazione $3x - 2y - z + 17 = 0$.

Problema 3

3. Completa il procedimento per risolvere il seguente problema. *Scrivi l'equazione del piano β che passa per $O(0, 0, 0)$, per $P(2, -4, 3)$ ed è perpendicolare al piano α d'equazione $x - 2y - z - 1 = 0$*

Nell'equazione del piano α trovo i coefficienti $a = 1$, $b = -2$, $c = -1$

Nell'equazione del piano β debbo trovare a' , b' , c' in modo che:

- β passi per $O(0, 0, 0)$ e perciò risulti $a' \cdot 0 + b' \cdot 0 + c' \cdot 0 + d' = 0$,
da cui $d' = 0$ (*)
- β passi per $P(2, -4, 3)$ e perciò risulti $a' \cdot 2 + b'(-4) + c' \cdot 3 + d' = 0$,
da cui $2a' - 4b' + 3c' + d' = 0$ (**)
- β sia perpendicolare ad α e perciò risulti $a' \cdot 1 + b' \cdot (-2) + c' \cdot (-1) = 0$,
da cui $a' - 2b' - c' + d' = 0$ (***)

Le tre condizioni debbono valere contemporaneamente, perciò risolvo il sistema formato dalle tre equazioni ottenute e ottengo:

$$\begin{cases} d' = 0(*) \\ 2a' - 4b' + 3c' + d' = 0(**) \\ a' - 2b' - c' + d' = 0(***) \end{cases} \text{ da cui } \begin{cases} d' = 0 \\ 2a' - 4b' + 3c' = 0 \\ a' = 2b' + c' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d' = 0 \\ c' = 0 \\ a' = 2b' \end{cases}$$

Il piano β ha quindi equazione $2b'x + b'y = 0$ ossia $2x + y = 0$.

Problema 4

4. Scrivi l'equazione della sfera di centro $C(-4, 1, 3)$ e raggio $r = 5$.

$$[x - (-4)]^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 5^2$$

ossia

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 25$$

La sfera passa per $O(0, 0, 0)$? ☐ Sì ☒ No

Perché $(0 + 4)^2 + (0 - 1)^2 + (0 - 3)^2 = 16 + 1 + 9 = 26 \neq 25$