Grafico e legge del moto armonico

Guarda un breve video per osservare **il *moto armonico***

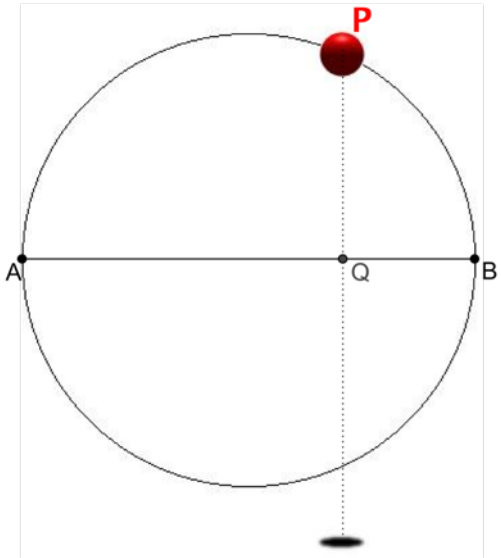
Il moto armonico

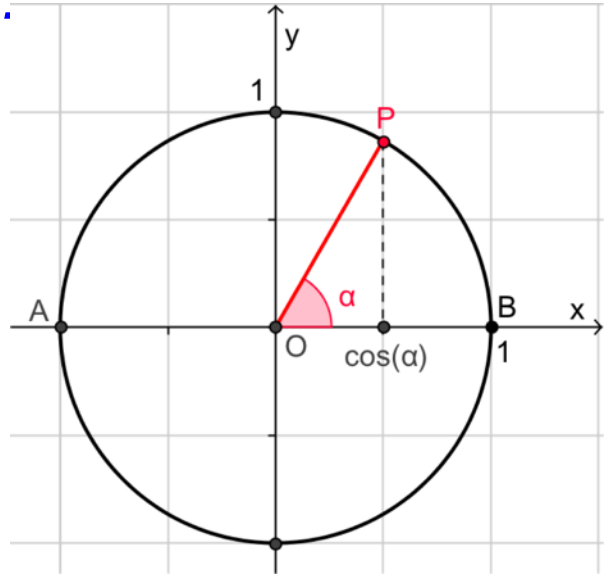


Come si spiega il grafico del moto armonico?

L'ombra della pallina che si muove di moto circolare uniforme, richiama una classica definizione:

il moto armonico è la proiezione di un moto circolare uniforme su un diametro della circonferenza.





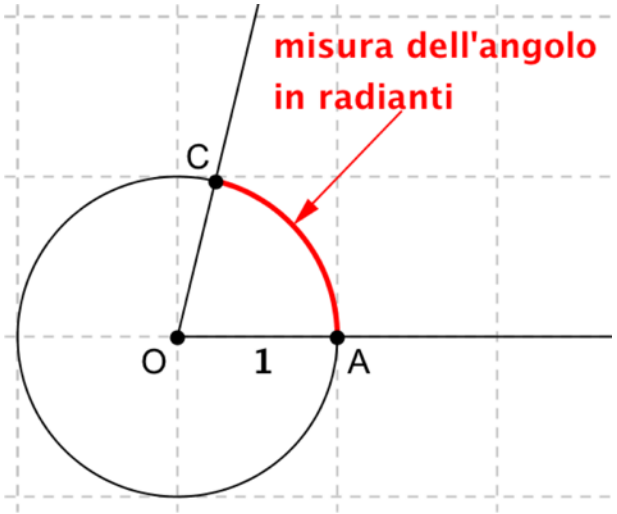
Per proseguire, sono importanti due nozioni:

- in matematica, la misura di un angolo in radianti;
- in fisica, la velocità angolare di un moto circolare.

Misura di un angolo in radianti

Dato un angolo di vertice O, traccia una circonferenza di centro O, che interseca i lati dell'angolo in A e C. Si chiama *misura dell'angolo AOC in radianti* il rapporto fra la lunghezza L dell'arco AC e la lunghezza *r* del raggio.
***Se r = 1, la lunghezza dell'arco è la misura in radianti dell'angolo*.**

L'animazione seguente illustra la relazione fra misura di un angolo in gradi e misura in radianti.



Anna Maria Miele 2020

Misura di un angolo in radianti

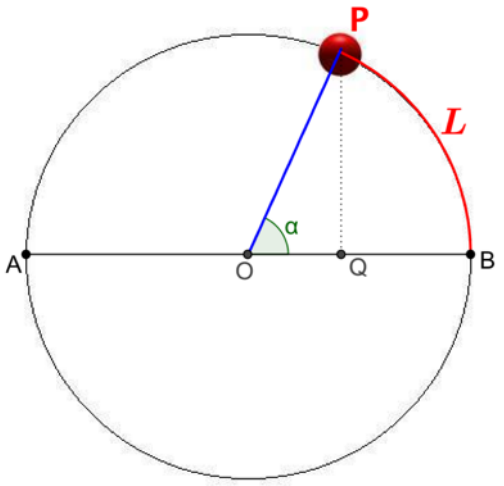


Velocità angolare di un moto circolare uniforme

Per una pallina che si muove di *moto circolare uniforme si trova che:* ***è costante il rapporto ω fra l'ampiezza α dell'angolo BOP e il tempo t impiegato da OP a spazzare l'angolo.***

Se la circonferenza ha raggio r = 1, trovo:
L = misura α dell'angolo BOP in radianti.

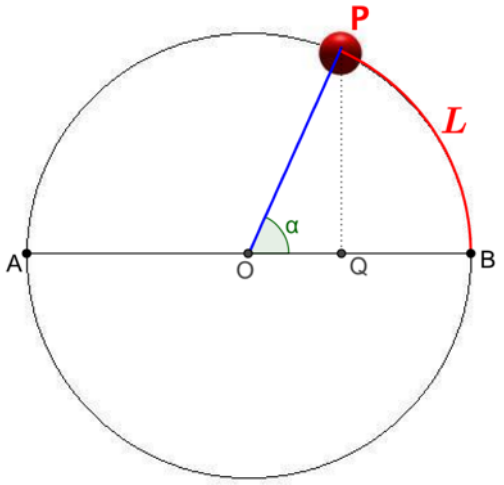
$$\omega = \frac{\alpha}{t} \Rightarrow \alpha = \omega t$$



Velocità angolare di un moto circolare uniforme

Per una pallina che si muove di *moto circolare uniforme si trova che:*
è costante il rapporto ω fra l'ampiezza α dell'angolo BOP e il tempo t impiegato da OP a spazzare l'angolo.

$$\omega = \frac{\alpha}{t} \Rightarrow \alpha = \omega t$$

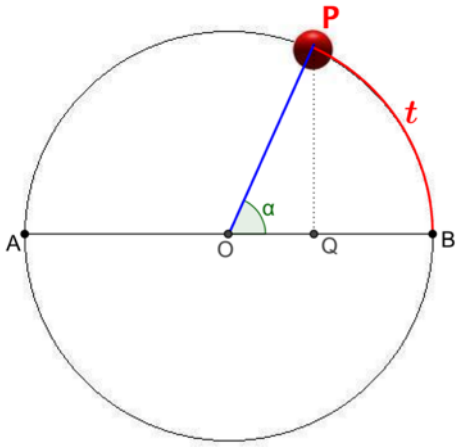


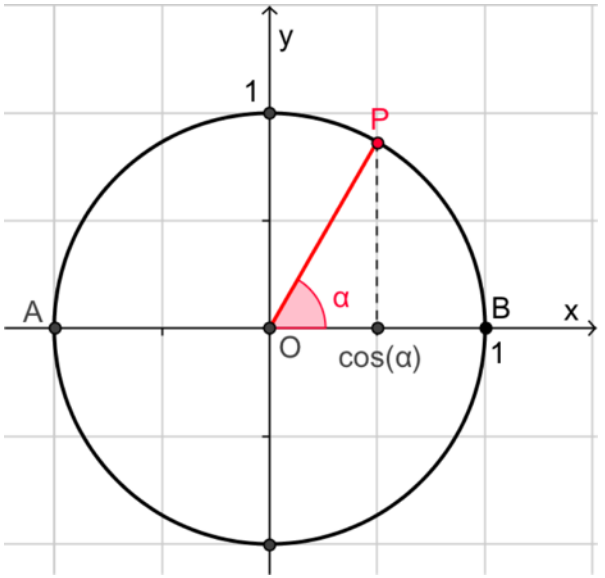
Se la circonferenza ha raggio r = 1, trovo:
L = misura α dell'angolo BOP in radianti.

Se ω = 1, trovo che:
OP spazza un angolo di 1 radiante ogni secondo.
P percorre l'intera circonferenza in un tempo T = 2π ≅ 6,28 secondi.
Q percorre sul diametro AB un'oscillazione completa nel tempo T.
T prende il nome di periodo.

La legge del moto armonico in un caso semplice

velocità angolare ω = 1 **e** **raggio r = 1**





α = t **e** **L'ascissa *d* del punto Q è data da**
d* = *cos(α)

La posizione di Q varia al variare del tempo con la legge
d* = *cos(t)

Come traccio il grafico di questa legge?

Anna Maria Miele 2020

Attività1. Il grafico del moto armonico

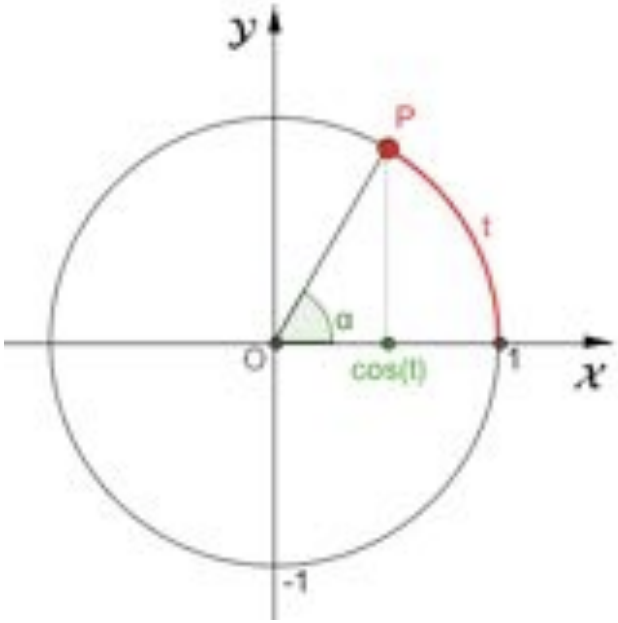
Completa la scheda 1 per tracciare il grafico del moto armonico

Riflessioni sul lavoro con la scheda

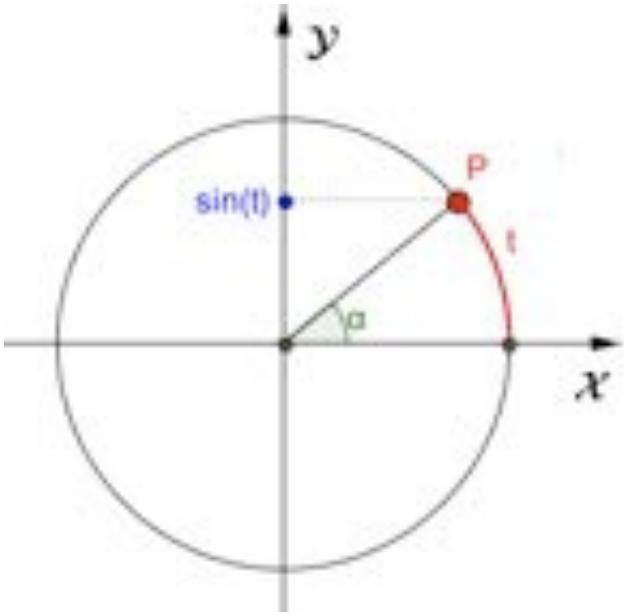
Che cosa hai trovato?

Il grafico del moto armonico in due casi

1. Proietto P su un diametro orizzontale

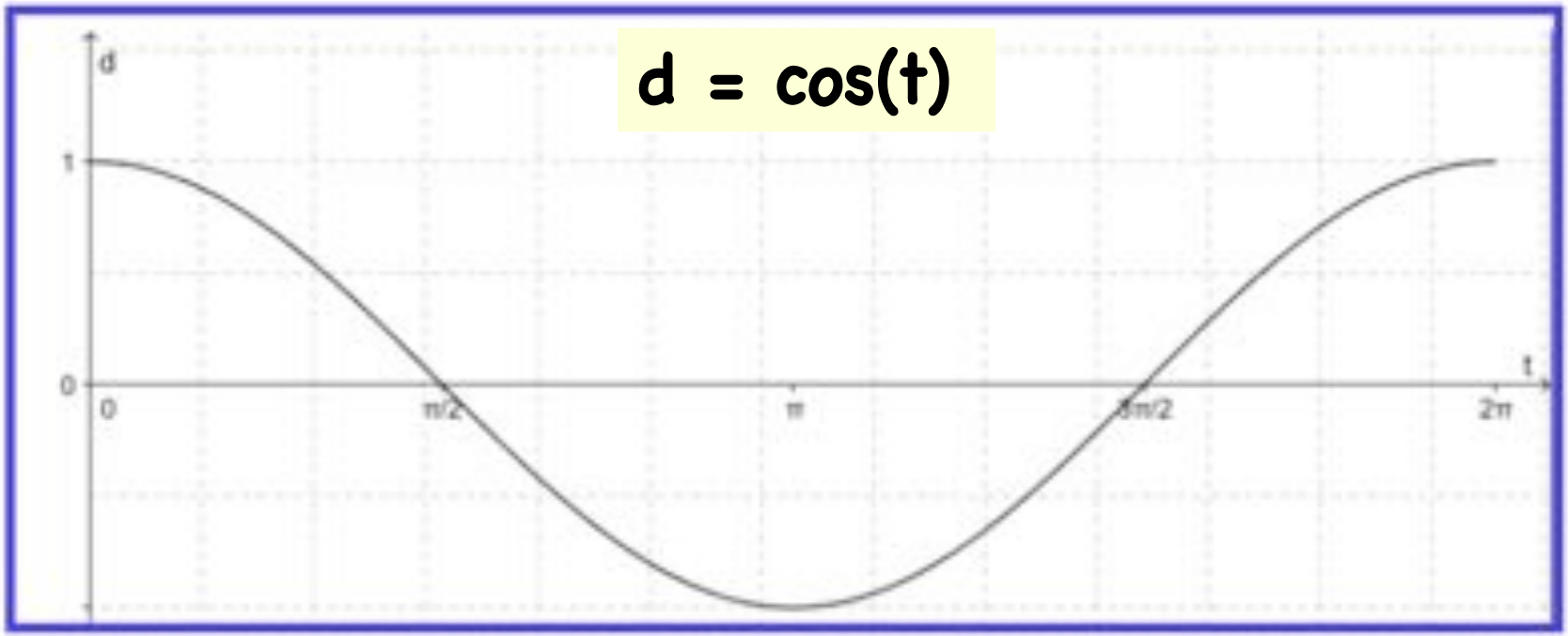


2. Proietto P su un diametro verticale



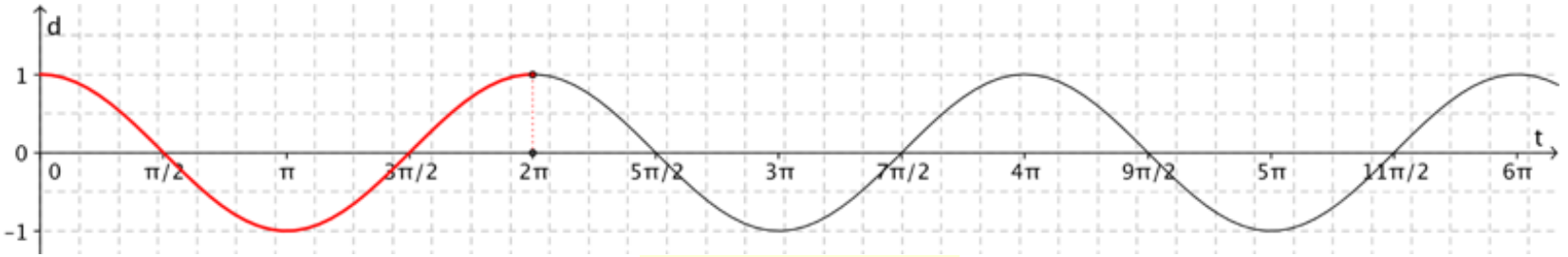
1° Grafico di moto armonico

t in gradi	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
t in radianti	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	2π
cos(t)	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1



Il movimento continua

P continua a girare sulla circonferenza e la sua proiezione continua a oscillare sul diametro.



d = cos(t)

Per disegnare il grafico ripeto tante volte l'arco rosso, disegnato prima solo nell'intervallo [0; 2π], che è lungo 2π.

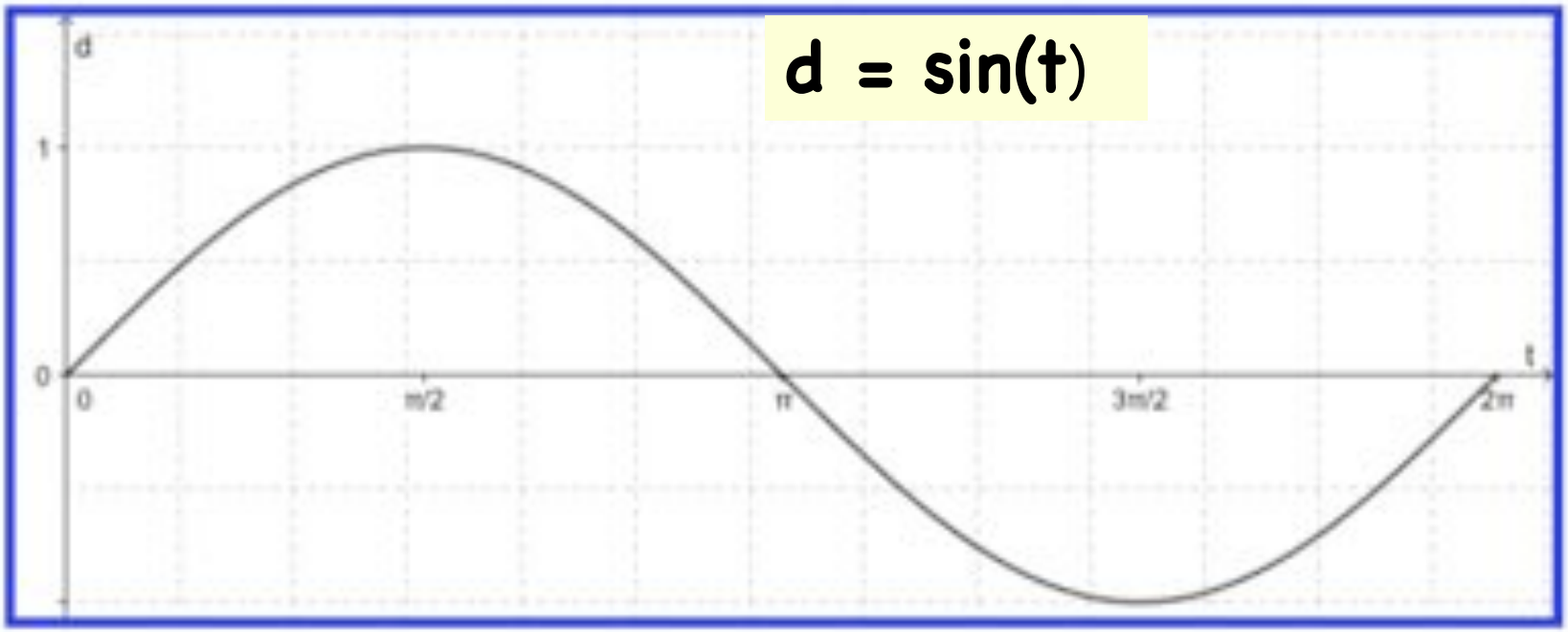
Ottengo un grafico periodico con periodo 2π.

Ritrovo sul grafico il periodo T= 2π suggerito dall'osservazione del moto armonico.

Anna Maria Miele 2020

2° Grafico di moto armonico

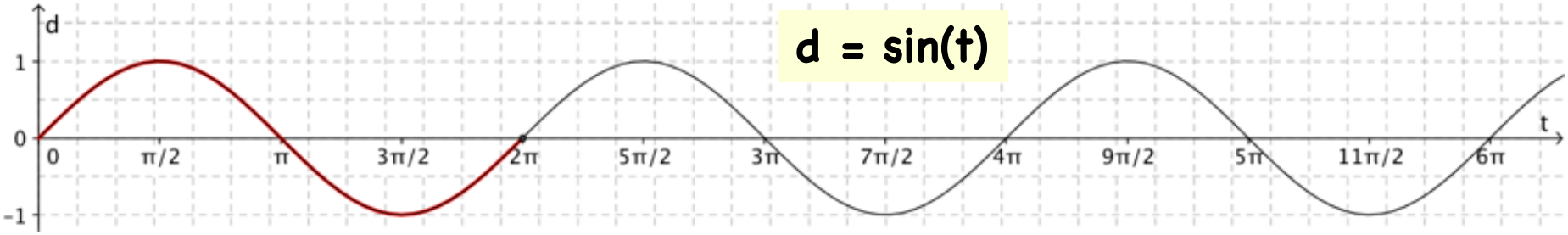
t in gradi	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	330°	360°
t in radianti	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
sin(t)	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0



Anna Maria Miele 2020

Il movimento continua

P continua a girare sulla circonferenza e la sua proiezione continua a oscillare sul diametro.



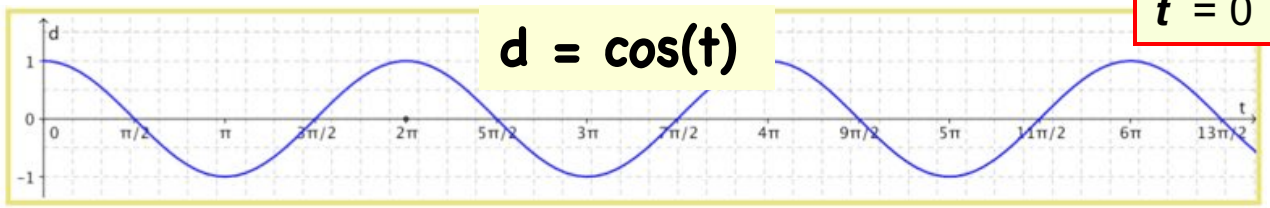
Per disegnare il grafico ripeto tante volte l'arco rosso, disegnato prima solo nell'intervallo [0; 2π], lungo 2π.

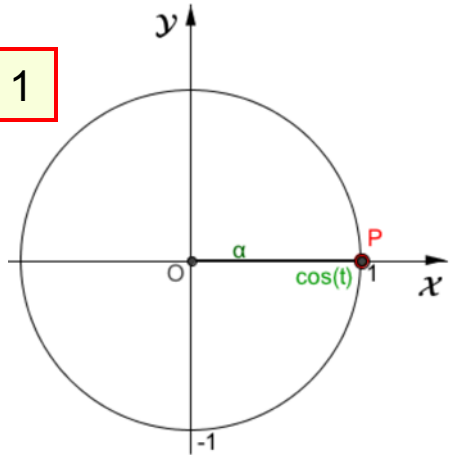
Anche questo grafico ha periodo T = 2π.

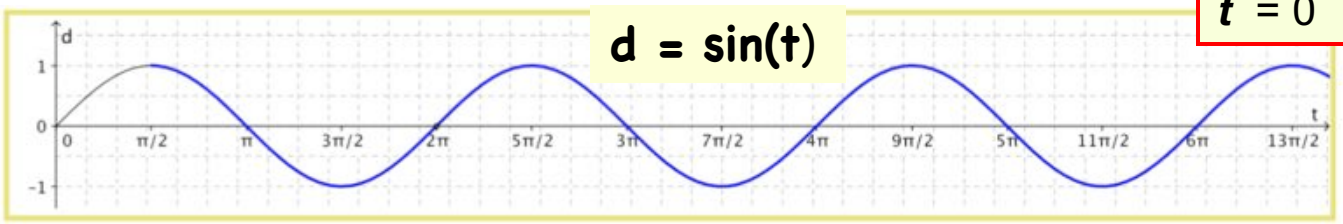
Così è spiegato il particolare andamento del grafico del moto armonico.

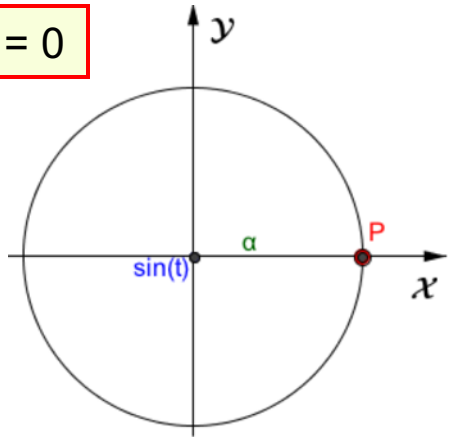
Anna Maria Miele 2020

La legge del moto armonico









Le due curve hanno lo stesso andamento.
Legge del moto armonico
d = sin(t)

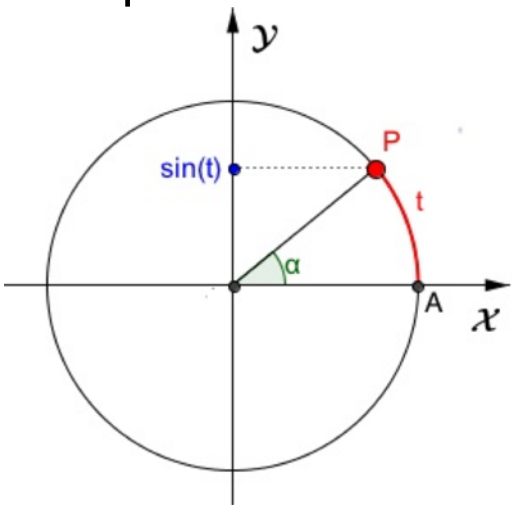
Le funzioni circolari

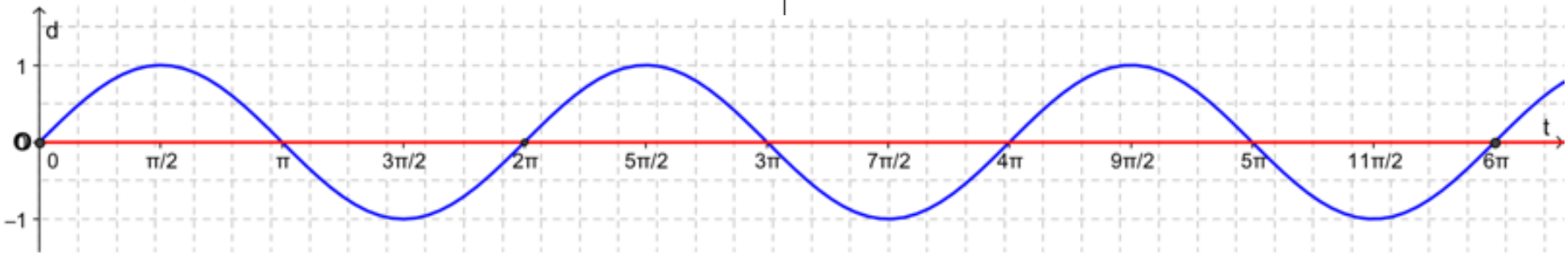
Dalla fisica alla matematica

Riflessioni sul grafico di d = sin(t)

Osserva le figure qui sotto.

- ***Nella figura in alto*** trovi la lunghezza ***t*** dell'arco ***AP***, che si avvolge sulla circonferenza come un lungo filo, mentre ***P*** gira in verso antiorario;
- ***Nella figura in basso*** l'arco ***AP*** si distende sull'asse delle ascisse, a partire dall'origine ***O,*** nel verso positivo.



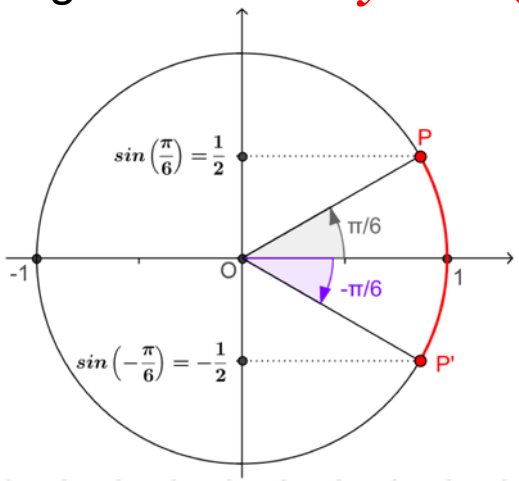


Anna Maria Miele 2020

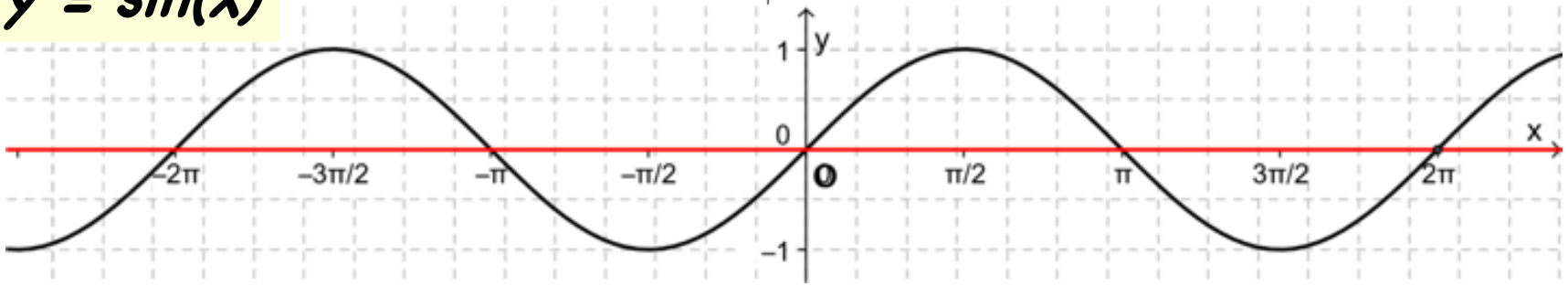
La funzione y = sin(x)

Ora non pensiamo più alla fisica e al tempo.

- ***Nella figura in alto P*** può girare anche in verso opposto (cioè orario)
- ***Nella figura in basso,*** per ricordare il cambiamento di verso, distendo l'arco ***AP*** sull'asse delle ascisse, a partire dall'origine ***O*** anche nel verso negativo e continuo il grafico. Così ottengo la funzione $y = \sin(x)$.



y = sin(x)

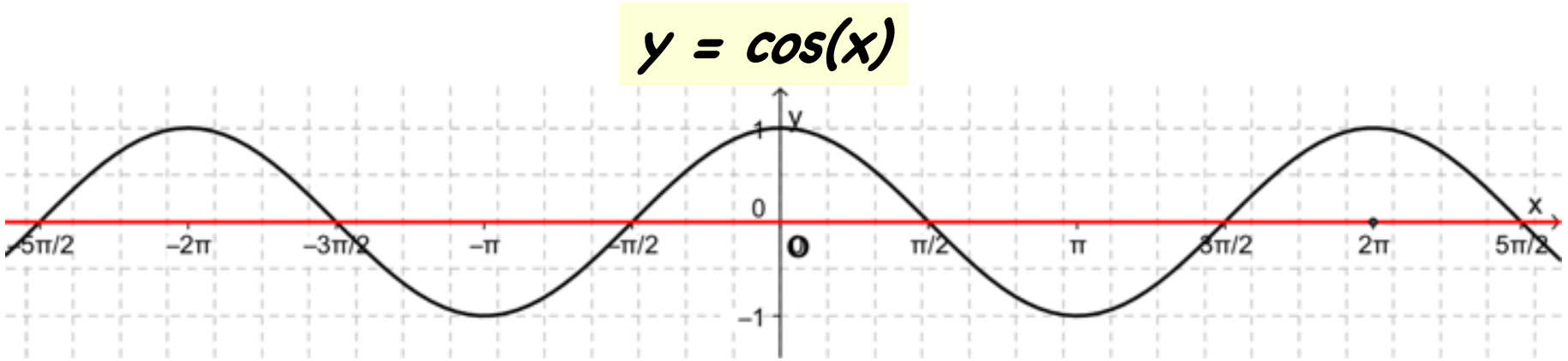


La curva prende il nome di sinusoide

Anna Maria Miele 2020

La funzione y = cos (x)

In modo analogo tracciamo il grafico di $y = \cos(x)$.



La curva prende il nome di cosinusoide

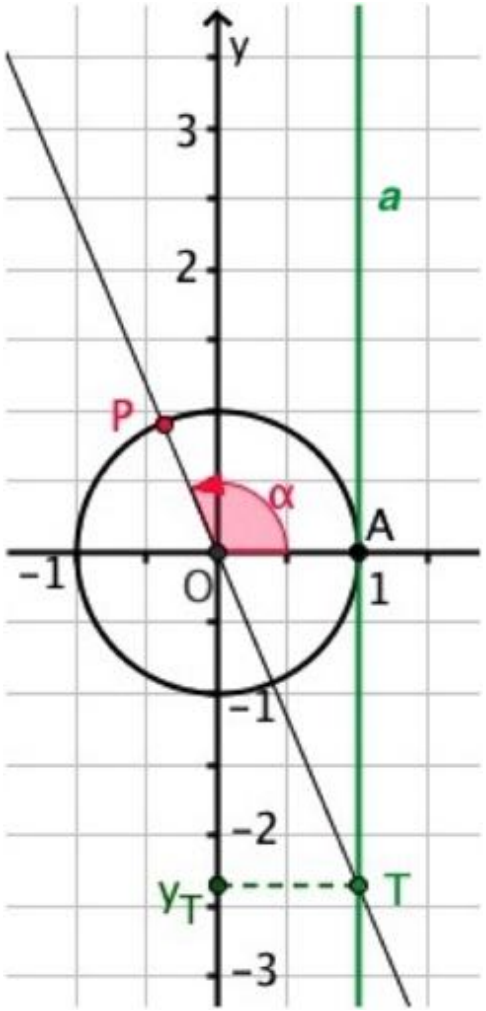
Attività 2

Completa la scheda 2 per lavorare con una terza funzione circolare

Che cosa hai trovato

- **Hai richiamato il procedimento per determinare tan(α);**
- **Hai tracciato il grafico di *y = tan(x)*;**
- **Hai riflettuto su varie domande suscitate dall'andamento 'insolito' di *y = tan(x)* .**

Procedimento per determinare tanα



a **retta tangente alla circonferenza in A(1; 0)**

T punto di intersezione fra la retta a e la retta OP

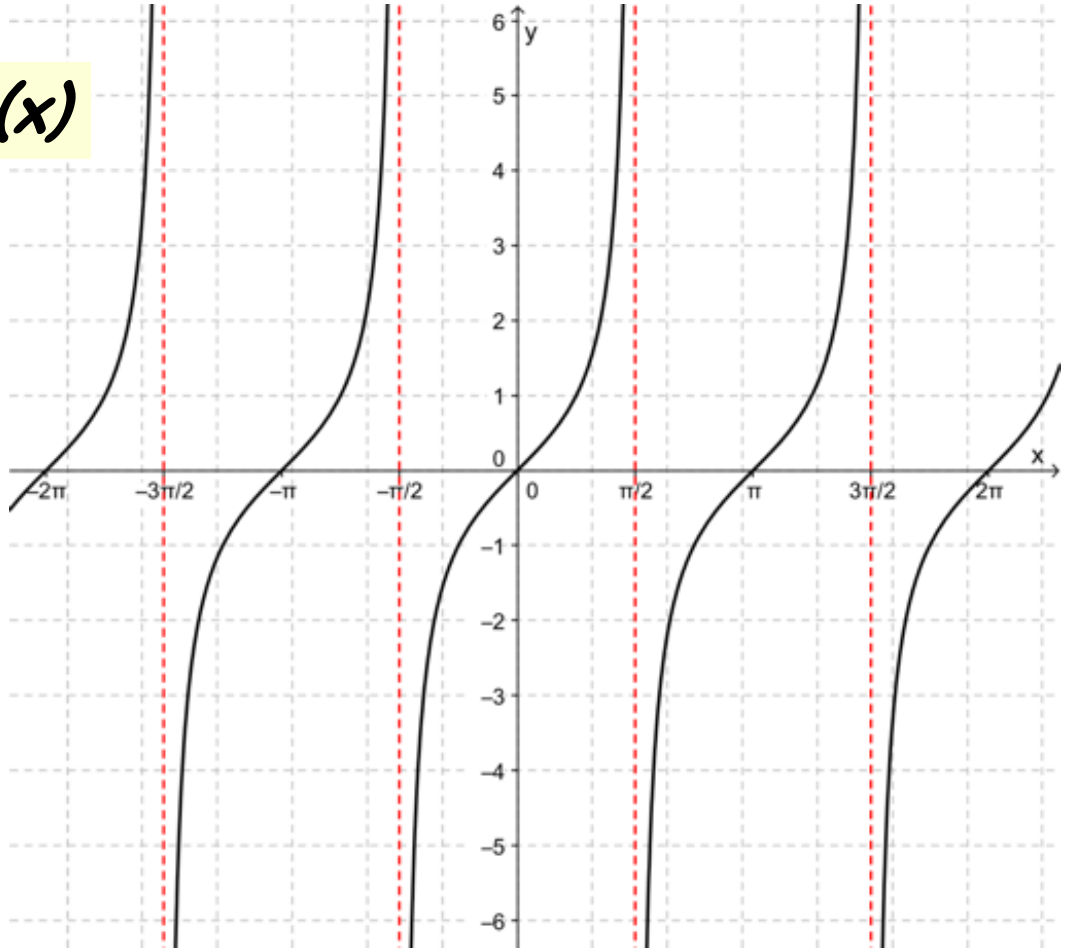
$$\tan\alpha = y_T$$

Prime osservazioni sull'andamento di tanα

Angolo α	Punto T	tanα
0°	T ≡ A(1;0)	$\tan\alpha = y_T$ $\tan\alpha = 0$
$0° < \alpha < 90°$	***T*** percorre la semiretta tangente, al disopra dell'asse *x* e si allontana sempre più verso l'alto, mentre l'angolo acuto α si avvicina a 90°.	Cresce da 0 verso numeri positivi sempre più grandi, mentre l'angolo acuto α si avvicina a 90°.
90°	***T*** non esiste perché la retta ***OP*** si sovrappone all'asse ***y***, che è parallelo ad ***a***.	***tan90° non esiste***
$90° < \alpha < 180°$	***T*** 'salta' sulla semiretta tangente, al disotto dell'asse ***x*** e parte da posizioni molto lontane in basso, mentre l'angolo ottuso α è molto vicino a 90°.	Parte da numeri negativi molto piccoli, mentre l'angolo ottuso α è molto vicino a 90° e poi cresce verso 0.
180°	T ≡ A(1;0)	$\tan\alpha = y_T$ $\tan\alpha = 0$
$180° < \alpha < 360°$	***T*** ripercorre le stesse posizioni occupate nel caso $0° \leq \alpha \leq 180°$ e perciò tanα ripete lo stesso andamento. In particolare, ***non esiste tan270°.***	

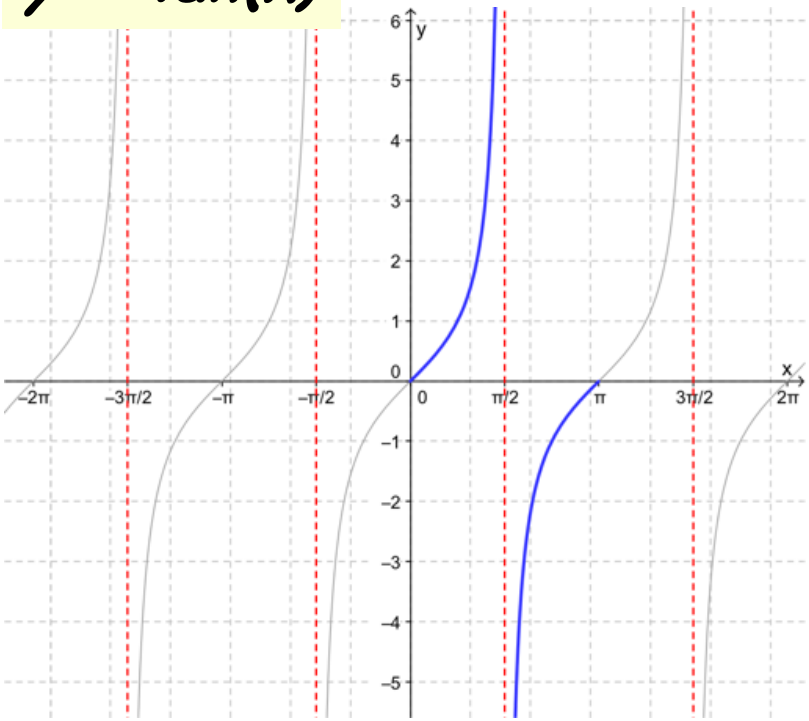
Il grafico di y = tan(x)

y = tan(x)



La curva prende il nome di *tangentoide*

Andamento di $y = \tan(x)$



Il periodo è π

Nel grafico si ripete uno stesso arco, come l'arco blu disegnato nell'intervallo [0, π], lungo π.

In corrispondenza all'ascissa π/2

Non esiste un punto della tangentoide con ascissa π/2, perciò la curva non incontra la retta d'equazione x = π/2.

Un punto della curva passa da sinistra a destra dell'ascissa π/2

Prima dell'ascissa π/2, il punto sale sempre più in alto,

In corrispondenza dell'ascissa π/2, il punto 'scompare'

Appena superata l'ascissa π/2, il punto 'riappare' dal basso.

Anna Maria Miele 2020